Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

von

Dr. Martin Ohm,

Prof. ord. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Allgem. Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

Erster Theil,

Arithmetik und Algebra enthaltend.

Dritte, umgearbeitete Auflage.

Mit einer Figurentafel

und einem Anhange

eine kurze Theorie der Koordinaten enthaltend.

Nürnberg, 1853.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Lehrbuch

der

niedern Analysis,

von

Dr. Martin Ohm,

Prof. ord. an der Königl. Universität, Lehrer an der Königl. Allgem. Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, der Königl. Bayer. Akademie der Wissensch. zu München, so wie mehrerer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied; Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

Erster Theil,

Arithmetik und Algebra enthaltend.

Dritte, umgearbeitete Auflage.

Mit einer Figurentafel
und einem Anhange
eine kurze Theorie der Koordinaten enthaltend.

Nürnberg, 1853.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Aus der Vorrede zur zweiten Auflage.

Der Verf. hat bei der Herausgabe dieses Werkes keine andere Absicht, als für die gesammte Mathematik das zu geben, wodurch Euklid's Elemente für das Studium der Geometrie so wichtig geworden sind. In Erwägung aber, daß hinsichtlich des Umfanges, die Elemente der Geometrie zur gesammten Mathematik, und allein schon zum Kalkul, sich verhalten — wie ein Wassertropfen zum großen Weltmeere, scheint das Unternehmen die Kräfte des Einzelnen weit zu übersteigen, und der Verf. hat daher diese Leistung mit Vorbedacht einen Versuch genannt. Wie wichtig, ja wie nothwendig die hier beabsichtigte Arbeit aber ist, hat sich seit dem vor 6 Jahren erfolgten ersten Erscheinen des 1sten und 2ten Theils derselben, wiederum bedeutend entschiedener herausgehoben, so daß das Streben selbst jetzt keiner Entschuldigung mehr bedarf. Wohl aber muß sich der Verf. wegen der, in dieser neuen Ausgabe getroffenen Aenderungen rechtfertigen und demnach folgendes bevorworten.

Der Verf. hat seitdem seine Ansichten über den Kalkul, über die Mathematik überhaupt und über ihre Anwendung, durch alles ihm vorgekommene durchaus nur immer auf's neue bestätigt gefunden, also nicht im Geringsten geändert; er hat aber dieses Lehrbuch seinen analytischen Vorlesungen zu Grunde gelegt, und Gelegenheit genug gehabt, wahrzunehmen, wo jeden der Schuh

drückt. Da nun die Aufmerksamkeit, welche auch außer dem Bereiche seiner Vorträge den Lehrbüchern des Verf. und den darin aufgestellten neuen, weniger materiellen Ansichten, so wie dem dadurch bedingten einfachern und konsequentern Gange geschenkt wird, es ihm zur doppelten Pflicht macht, seinerseits nichts zu vernachlässigen, was ihre Brauchbarkeit vermehren und sichern kann, so hat diese neue Ausgabe doch eine gänzliche Umarbeitung erlitten. Es ist namentlich gesucht worden, die elementarern Lehren mehr abzukürzen, bloß den Geist derselben hervorzuheben und hinsichtlich der Details auf den 1sten Band der „reinen Elementar-Mathematik des Verf., Berlin 1825", *) zu verweisen, dagegen die feinern, und für die sogenannte höhere Analysis wichtigern Untersuchungen mehr durch Beispiele zu erläutern, dem trockenen Styl mehr Anschaulichkeit, Lebendigkeit und Anmuth zu geben (so viel solches nämlich anzugehen schien, ohne das Wichtigste, d. h. die strengste Consequenz aufopfern zu müssen), endlich eine bequeme geistige Uebersicht des Ganzen zu erleichtern, damit sich der Leser an jeder Stelle, der durchaus vorhandenen wissenschaftlichen Einheit auch bewußt werden möge. Dieser letztern Absicht wegen ist theils ein genaues übersichtliches Inhalts-Verzeichniß, theils den einzelnen Kapiteln eine Vorerinnerung beigegeben, welche die Grundidee immer auf's neue vor die Augen rücken soll.

Diese Grundidee hat aber der Verf. aus dem Studium der Geschichte der Mathematik und vorzüglich des (übrigens kaum einige Jahrhunderte alten) Kalkuls abstrahirt, und sie ist dem Wesen nach folgende:

Die (unbenannte, ganze) Zahl ist der höhere Begriff; die benannte Zahl (die Quantität) der niedrigere. Die Lehre der (unbenannten, ganzen) Zahlen umfaßt daher das ganze Gebiet

*) Jetzt in der dritten Auflage, Berlin 1844.

der Mathematik; die Lehre der Quantitäten ist nur eine einfache Anwendung der erstern. — In den verschiedensten Erscheinungen des Kalkuls (der Arithmetik, Algebra, Analysis ꝛc. ꝛc.) erblickt der Verf. nicht Eigenschaften der Größen, sondern Eigenschaften der Operationen, d. h. der Verstandes-Thätigkeiten, welche aus der Betrachtung der Zahl mit Nothwendigkeit hervorgehen, und welche Gegensätze und Beziehungen äußern, die in dem ganzen physischen und psychischen Haushalte der Natur allenthalben sich wieder nachweisen lassen *). — Die Analysis hat es, diesem nach, nicht mit den Größen zu thun, sondern hat nur die (allgemeinern) Gesetze der Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) zu fixiren und in allen ihren Modifikationen zu

---

*) Dadurch ist aber die Wichtigkeit der Anwendung der Mathematik zur Erforschung höherer Naturwahrheiten bedingt, in so ferne jedem mathematischen Physiker die Wahrheit der Behauptung einleuchtet, daß die sogenannten besondern Qualitäten nichts anders sind, als Erscheinungen, welche aus quantitativen Verbindungen einiger wenigen höhern Qualitäten hervorgehen, während von letztern vielleicht im Laufe der Jahrtausende wiederum dasselbe gesagt werden kann, so daß zuletzt bloß eine im Dualismus zerspaltene Urqualität übrig bleiben dürfte, deren Wesen der Mensch nimmer ergründen wird, während er alle uns bis jetzt noch als Qualitäten erscheinenden quantitativen Zusammensetzungen aus ihr, auf mathematisch-analytischem Wege vielleicht nachzuweisen gelernt haben dürfte. — Und wenn bis jetzt von dem hier angedeuteten wenig mehr als der Anfang gemacht ist (von Newton, La Place, Fourier, Poisson, ꝛc. ꝛc.) so zeigt doch der erste in Deutschland gemachte Versuch der Art (in der „mathematisch bearbeiteten galvanischen Kette des Dr. G. S. Ohm, Berlin 1827."), wie selbst Naturkräfte, welche sich bis jetzt festen Gesetzen am meisten entzogen hatten, endlich doch der Kraft der mathematisch-analytischen Dynamik weichen müssen, und wie die dahin gehörigen, verschiedenartigsten Erscheinungen nichts anders sind, als nothwendige quantitative Folgerungen aus einigen wenigen Eigenthümlichkeiten dieser Kräfte, die man bis jetzt noch als eigene Qualitäten ansehen muß, bis solche (oder die Kräfte selber) im Laufe der Zeiten endlich wieder ihre Auflösung finden werden. (Vgl. Proteus 2tes Heft 1828. und Schweiggers Jahrbücher der Chemie und Physik 1828. II.).

verfolgen. — Die sogenannten negativen, gebrochenen, imaginären, — sind nicht Größen, sondern spezielle Erscheinungen allgemeiner, aus einer nothwendigen Abstraktion der Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) von dem womit operirt wird, hervorgehender Zahlenbegriffe (allgemeiner Formen oder Zusammensetzungen). — Gleichungen zwischen imaginären, gebrochenen, negativen — sind nicht Gleichungen zwischen Größen, deuten also nicht Einerleiheit der Quantität an, sondern sind bloß spezielle Modifikationen der Gegensätze, in denen die Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) zu einander stehen, und deuten bloß Identität von verschiedenen Gedankenreihen an. — Entgegengesetzte Größen gibt es nicht, sondern derjenige Gegensatz, welcher einseitig aufgefaßt, zu dem Glauben an entgegengesetzte Größen geführt hat, entspricht dem Gegensatze zwischen dem Addiren und Subtrahiren. Andere Gegensätze (der physischen und psychischen Welt) entsprechen dem der Multiplikation und Division; und noch andere dem dreifachen Gegensatz, der zwischen dem Potenziren, Radiziren und Logarithmiren wahrgenommen wird *).

Sonach kommen nirgends im Kalkul (Arithmetik, Algebra, Analysis 2c. 2c.) Größen vor; aber die ganze Analysis kann unmittelbar zur „Vergleichung der Größen" angewandt werden. — In den Größen selbst unterscheidet man Qualität und Quantität. In so ferne die Größen Quantität haben, sind sie benannte Zahlen, die wiederum mit einander verglichen werden, bei einerlei Benennung, durch die unbenannten Zahlen, während zu der Vergleichung der letztern eben die Gesetze ver-

*) Wie klar namentlich eine Koordinaten-Theorie wird, wenn man den Gegensatz zwischen rechts und links, zwischen oben und unten, nicht auf die Größen, sondern auf die Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) wirft, glaubt der Verf. in seiner „analytischen Geometrie in ihren Elementen Berlin 1827." zur Genüge nachgewiesen zu haben.

wandt werden, nach welchen sich die sieben Verstandes-Thätigkeiten, die wir Operationen nennen, richten.

So geht Lehre und Anwendung Hand in Hand, jede aber bestimmt und sorgfältig von der andern geschieden; so vereinfacht sich die Lehre wie die Anwendung unglaublich, und beide werden dadurch dem unbefangenen redlichen Forscher unendlich leichter zum Eigenthum.

In Bezug auf Methode befolgt der Verf. ganz den einfachen und unverdorbenen Gang der Alten. Er findet auf dem analytischen (zergliedernden) Wege; er hält das so gefundene nicht eher für wahr, als bis er auf dem Wege der Synthesis sich von der Nothwendigkeit des Gefundenen auf das sorgfältigste überzeugt hat. In seinen mündlichen Vorträgen kann der analytische Gang jedesmal gehörig durchgeführt werden; in den Lehrbüchern dagegen, um allzugroße Weitläufigkeit zu vermeiden, nur angedeutet sein, mit wenigen, kräftigen Zügen. Dem oberflächlichen Leser kann deshalb das synthetische Ansehen dieser Lehrbücher des Kalkuls (der vorzugsweise, wenn auch unpassend, Analysis genannt wird) unangenehm auffallen; bei dem tiefer gehenden, auch zwischen den Zeilen lesenden, kann dies nicht der Fall sein.

Daß man nach diesen Ansichten den Kalkul mit ungemeinem Erfolg an Gymnasien, und zwar in Untermittelklassen bereits lehren könne, besonders auch zur Förderung formeller Bildung, hat der Verfasser früher zur Genüge bewiesen, und es findet dieser Erfolg in dem Umstande seinen Grund, daß diese Ansicht des Kalkuls dieselbe Consequenz im Schließen, dieselbe Selbstthätigkeit im Folgern in Anspruch nimmt, als dies die Euklidsche Geometrie thut, nur noch in höherem Grade. Der Lehrer muß jedoch auch pädagogische Rücksichten nehmen, und in dieser Beziehung muß der Verf. denjenigen Lehrern, welche sich seiner Lehrbücher bedienen wollen, rathen, das ganze System sich recht

tüchtig anzueignen, und anfänglich den 1sten Theil der reinen Elementar-Mathematik zu Grunde zu legen, während der 2te und 3te Theil desselben Elementar-Werkes, den geometrischen und trigonometrischen Vortrag, wie er sich an diesen arithmetischen anschließt, und wie er von dem Verf. für Schulen passend gefunden wird, enthalten.

Berlin, im Juni 1828.

Vorrede zur dritten Auflage.

Der Lehrer und der lehrende Schriftsteller lernt zugleich mit seinen Schülern und Lesern. Diese Wahrnehmung kann man auch machen, wenn man diese dritte Auflage mit den beiden erstern vergleicht. Stets bleibt zwar die Grundidee eine und dieselbe, von den Anschauungen älterer Lehrbücher wesentlich verschiedene, — aber die Darstellung ringt sich von Auflage zu Auflage immer mehr zu größerer Uebersichtlichkeit, Klarheit und Deutlichkeit; und wenn die früheren Auflagen den allzu abstrakten Stoff nicht so überwunden darstellen als die gegenwärtige, so hat der Verf. auch 30 Jahre Zeit und Gelegenheit gehabt, um nach und nach eine Form zu finden, welche ihn selbst befriedigt. — Möchten nun auch recht viele Leser dieselbe Befriedigung fühlen, die der Verf. bei der Publikation dieser neuesten letzten Auflage so eben ausgesprochen hat.

Welches aber die leitende Grundidee und welches die Veranlassung zur Ausarbeitung der erstern Veröffentlichung dieses Werkes (im Jahre 1822) gewesen ist, hat der Verf. nicht bloß in der hier vorgedruckten Vorrede zur 2ten Auflage, sondern noch vollständiger in der Einleitung des Anhanges zu dieser 3ten Auflage möglichst kurz beschrieben.

Die mathematische Analysis hatte in den letztern 150 Jahren die bedeutendsten Fortschritte gemacht, — ja sie war in dieser Zeit aus kaum sichtbarem Anfange auf eine überraschende Höhe gestiegen, die sich in der „Mechanik des Himmels" und in der Beantwortung der Fragen über schwingende Saiten und Ver-

breitung der Wärme, des Lichtes, der galvanischen Ströme und über ähnliche Probleme auf das erfreulichste bekundete. Und doch fehlte diesem herrlichen Gebäude noch ganz die wissenschaftliche Grundlage. Die „imaginären Größen" (welche in der Mathematik dieselbe Rolle spielten, die in der Physik das „hölzerne Eisen" spielen würde, wenn einmal ein Physiker die Kühnheit hätte, ein solches in die Physik einzuführen), befriedigten Niemanden, — ja es gab (damals) noch mehrere Mathematiker, welche Anstand nahmen sich derselben zu bedienen. Die „entgegengesetzten Größen" (die positiven und negativen) waren während der ganzen Entwickelungs-Dauer der Analysis fortwährend der Gegenstand großer Controversen, selbst unter den Heroen der Wissenschaft, wie z. B. unter Leibnitz, den beiden Bernoulli's, Euler und d'Alembert; über das Wesen der Logarithmen stritt man sich noch im letzten Viertel des letztverflossenen Jahrhunderts sehr lebhaft, ohne zu einer befriedigenden Entscheidung zu kommen und Lacroix begnügt sich bei dieser Streitfrage mit der Bemerkung, daß Euler sie endlich materiell entschieden habe.

Fehlte aber der mathematischen Analysis (wozu hier alles gerechnet wird, was man unter dem Namen des Kalkuls, der gemeinen Rechenkunst, der Buchstaben-Rechenkunst, der Algebra, der Analysis des Endlichen, der Infinitesimal-Rechnung u. s. w. f. begreift) wirklich die wissenschaftliche Grundlage, — dann konnte auch kein Theil derselben von der Pädagogik als formell bildender Unterrichtsgegenstand benutzt werden; denn nur der Gegenstand wird zur formellen Bildung benutzt werden können, welcher in sich eine wissenschaftliche Einheit bildet und nicht ein bloßes Aggregat und Conglomerat einzelner, durch das praktische Bedürfniß im Laufe der Zeiten hervorgerufener Bruchstücke ist. Aber auch über diesen Punkt waren die besseren Lehrer der Ma-

thematik einig; sie gaben zu, daß man zwar z. B. die Euklid'sche Geometrie, gut gehandhabt, als formell bildenden Unterrichtsgegenstand benutzen könne, nicht aber z. B. die Buchstaben-Rechenkunst.

Der Verf., in dem Bestreben diese fehlende wissenschaftliche Grundlage zu finden, durchsuchte zunächst die ganze Geschichte des rechnenden Theils der Mathematik mit Sorgfalt, besonders die Stellen, wo die ersten Versuche gemacht worden sind mit negativen oder mit imaginären Größen zu rechnen. — Das erste Ergebniß dieser historischen Studien war die Ueberzeugung, daß gerade an diesen Stellen die Begriffe, den Rechnern unbewußt, in einem viel abstrakteren Sinne benutzt worden sind, als der war, in welchem sie anfänglich gegeben wurden, — als zweites Ergebniß fand der Verf., daß dies selbst bei den „gebrochenen Größen" (gebrochenen Zahlen) der Fall war. Sich dieser abstrakteren Bedeutung, die offenbar zu Grunde lag, jedesmal völlig bewußt zu werden, war nun die nächste Aufgabe. Wenn z. B. -2 mit -3 multiplicirt, $+6$ gab, — oder wenn $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt $\frac{1}{2}$ gab, — so war hier -3 offenbar nicht als „entgegengesetzte Größe" genommen, — aber eben so auch nicht $\frac{3}{4}$ als ein Theil einer ganzen Einheit, d. h. nicht als Größe, — abgesehen davon, daß der Begriff des „Multiplicirens" auch nicht mehr so einseitig aufgefaßt blieb, als er zuerst gegeben wird und wobei er mit dem Begriffe des „Vervielfältigens" zusammenfällt.

Diese allgemeineren Begriffe der Operationen fehlten alle im Bewußtseyn, wenn sie auch im praktischen Rechnen mit Ganzen, mit Brüchen, mit entgegengesetzten und mit imaginären Größen offenbar faktisch vorhanden waren; eben so fehlte der allgemeine Begriff der Null, denn der einseitige Begriff der Null, welcher in der Rechenkunst gegeben und später überall

ohne weitere Untersuchung beibehalten wurde, reichte offenbar nicht aus, um z. B. $a^0 = 1$ zu machen.

Der Verf. übergeht die mehrjährigen Studien, welche hierauf folgten, um alle diese Begriffe von einander zu trennen und zu sondern und kommt nun sogleich zu dem Endergebniß. Es stellte sich nämlich zuletzt entschieden heraus

a) daß ein „Rechnen“ mit „Größen“ nicht möglich sei,

b) daß selbst das Rechnen mit „Zahlen“ nur selten stattfinde und dann zugleich eine Anwendung eines allgemeineren Rechnens sei;

c) daß man im Allgemeinen (und daher fast in den meisten Fällen) nur mit Formen „rechne“, d. h. mit „angezeigten Operationen“, d. h. mit „Verstandes-Thätigkeiten“, die durch die Betrachtung der ganzen unbenannten Zahlen, (der einzigen Zahlen, die es überhaupt giebt) angeregt werden.

Das Nähere hierüber findet man in der Einleitung des Anhanges.

Die „unendlichen Reihen“ gewährten nach der älteren Ansicht neue und bedenkliche Schwierigkeiten. Glaubte man „Größen“ vor sich zu haben, so mußten diese Reihen convergent sein, damit sie wirklich eine Größe vorzustellen geeignet waren, während auf der andern Seite gerade die Allgemeinheit der Ausdrücke in der Analysis eines der wichtigsten Momente ist, bei ganz allgemeinen Fragen aber die Voraussetzung der Convergenz oft eine Unmöglichkeit wird. Nach der hier oben bezeichneten Ansicht dagegen braucht man nach der Convergenz der Reihen nur in den Fällen zu fragen, wo man bereits bestimmte numerische Reihen sich denkt, bei denen ihre allgemeine Form bereits mehr oder minder verschwunden ist, so daß eben ihre Form nicht mehr beachtet wird, sondern nur das, was man

ihren Werth nennen kann, nämlich die numerische endliche (gebrochene) Zahl, an deren Stelle sie steht. — So bewährt sich eine Ansicht, welche aus der naturgemäßen Betrachtung der allerersten Elemente hervorgegangen ist, gerade an den letzten Enden der Wissenschaft am erfreulichsten.

Die wesentlichsten Aenderungen, welche die gegenwärtige Auflage erlitten hat, sind ungefähr folgende:

Zunächst findet man dasmal das Gerippe des ganzen Gebäudes schon im ersten Kapitel ganz und vollständig zusammengestellt d. h. die Gegensätze und die Beziehungen der neun oder respektive der sieben Operationen auf das vollständigste niedergelegt, aber zunächst nur unter der Voraussetzung, daß man es überall nur mit den (ganzen, unbenannten) Zahlen zu thun habe. Die in diesem Kapitel enthaltenen Formeln sind für die gesammte Analysis viel wichtiger als es die Grammatik für die Sprache ist, weil sie die alleinigen Normen des „Rechnens" bilden.

Während nun in den folgenden Kapiteln der weitere Ausbau dieses Gerippes betrieben wird, entwickeln sich zunächst die Begriffe der „allgemeinen Summe" und der „allgemeinen Differenz", und in letzterer der Begriff der „Null" und die Begriffe der „additiven und subtraktiven Formen" ($0+b$ und $0-b$, welche kürzer durch $+b$ und $-b$ bezeichnet werden und die man früher als entgegengesetzte „Größen" angesehen und behandelt hat). — In einem ferneren Kapitel entwickeln sich die Begriffe allgemeinerer Produkte (und Quotienten) und zuletzt der „allgemeinen" Produkte und Quotienten und in letzteren wieder der Begriff der „gebrochenen Zahl". — Dadurch ist aber das untere Stockwerk des Gebäudes fest und in sich einig ausgebaut; und die Auffindung des (gemeinen) Ziffern-Rechnens, dann aber auch des Buchstaben-Rechnens (im Umfange dieser vier erstern oder elementaren Operationen) ist nun die nächste Anwendung, bei welcher Gelegen-

heit die „reellen" Zahlen als nothwendige Endresultate sich ergeben. Auch sie sind nichts weiter als eine bestimmte Folge (angezeigter) Operationen, welche wirkliche (ganze) Zahlen zu Trägern haben, und eben weil sie nichts anderes sind, darum kann mit ihnen nach bestimmten Regeln „gerechnet" werden.

Eine anderweitige Verbesserung dieser neuen Auflage kann darin gesucht werden, daß in diesem ersten Theile die „gebrochenen" Potenzen noch gar nicht in Betrachtung gezogen worden sind; sie ergeben sich im zweiten Theile sogleich in ihrer naturgemäßen Eigenthümlichkeit als specielle Fälle der „allgemeinen" Potenzen und ihre frühere Betrachtung ist nicht nothwendig und nur eine Reminiscenz an älteres Verfahren. Dasselbe gilt von einem weiteren Ausbau des dem Potenziren gegenüber liegenden Logarithmirens. — Das Ganze hat dadurch ungemein an Einfachheit zugleich aber auch noch an Gründlichkeit gewonnen.

Die Wurzeln, welche den „ganzen Potenzen" gegenüberliegen werden zwar erst im zweiten Theile dieses Werkes in ihrer größten Vollständigkeit behandelt; indem aber schon in diesem gegenwärtigen ersten Theile die Quadrat-, Kubik- und vierte Wurzeln in ihrer größten Allgemeinheit und Gründlichkeit behandelt worden sind, ist dadurch das Verständniß dieser wichtigen Lehre bedeutend erleichtert; und die Verallgemeinerung im zweiten Theile dieses Werkes erscheint jetzt bloß als ein Zusammenfassen bereits bekannter Lehren. — Die sogenannten imaginären Wurzeln ergeben sich dabei in ihrer naturgemäßen Stellung und stehen dadurch mit den „negativen" und den „gebrochenen" Zahlen in einer und derselben Kategorie.

Die wahre Stelle, welche die Algebra einnimmt, ist auf's Neue genau bezeichnet worden, und erscheint sie abermals als ein e i n z e l n e s, wenn auch umfangreiches Problem im Gebiete der gesammten Analysis.

Da die Analysis benutzt wird, um „Größen mit einander zu vergleichen" (wenn sie auch selbst eine Größenlehre nicht ist), so mußte schon zum Schlusse des ersten Theiles dieses Werkes eine „allgemeine Größenlehre" mitgetheilt werden; — wer sie sorgfältig studirt, der wird finden, wie die früher entwickelten sehr abstrakten Begriffe jetzt in der Anwendung gleichsam Fleisch und Bein gewinnen, wie es aber weder nöthig noch möglich ist, mit diesen nun materiell gewordenen Resultaten, unter welchem Namen man sie auch vorlegen möchte, zu „rechnen".

Weil es jedoch ein ziemlich allgemeiner Glaube ist, daß namentlich in der Koordinaten-Theorie eine Lehre der entgegengesetzten Größen unentbehrlich sei, — daß die Koordinaten selbst wirkliche entgegengesetzte Größen seien u. dergl. m., so hat dasmal der Verf. diesem ersten Theile noch einen kurzen Anhang beigegeben, welcher am geeignetsten ist nachzuweisen:

1) daß die Koordinaten, sie mögen rechts oder links, nach oben oder nach unten genommen werden, nicht entgegengesetzte „Größen" sind.

2) Daß die ganze Theorie der Koordinaten nur dann ohne alle Inconsequenzen durchgeführt werden kann, wenn man von der Thatsache ausgeht, daß die „Rechnung" mit „Größen" unmöglich ist.

Plötzlich von einem bedenklichen Augen-Uebel befallen, gerade nachdem das Manuscript zu der vorliegenden Schrift in die Druckerei gesandt worden war, blieb es dem Verf. unmöglich den Druck wie gewöhnlich selbst zu überwachen; daher muß derselbe noch dankbar erwähnen, daß der Plankammer-Inspektor und auch in weiteren Kreisen rühmlich bekannte Astronom, Herr Dr. Bremiker, dem der Verf. schon in den Jahren 1836—39 bei dem Drucke seines größeren „Lehrbuchs der Mechanik" verpflichtet worden ist, jetzt abermals mit der größten Uneigennützigkeit die letzte Korrektur

zu lesen die Güte gehabt hat. Dieser Dank des Verfs. ist um so aufrichtiger, als es ihm schwer geworden sein würde, unter seinen Freunden einen zweiten zu finden, dem er dieses Geschäft mit so großer Beruhigung hätte überlassen können, auch wenn sich noch einer dazu bereit gefunden haben dürfte.

Berlin, im Dezember 1852.

M. Ohm.

Inhalts-Verzeichniß des ersten Theils.

Allgemeine Einleitung. N. 1.–11.

Einleitung in die Zahlenlehre.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen (Operationen) der ersten Art, d. h. von der Addition und Subtraktion. — Von der Null und von den additiven und subtraktiven Ausdrücken. — Von den algebraischen Summen. — Von der positiven oder negativen ganzen Zahl.

Zweites Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der zweiten Art, d. h. von der Multiplication und der Division. — Von den gebrochenen und von den reellen Zahlen. — Vom (analytisch) Größeren und Kleineren.

Drittes Kapitel.

Anwendung der bisher aufgestellten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen zur Auffindung besonderer Eigenschaften der Zahlen selbst.

Viertes Kapitel.

Von den ganzen, den Differenz-Potenzen und den (allemal eindeutigen) absoluten Wurzeln.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der bisher entwickelten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen zur Auffindung der Regeln für das (gemeine) Ziffern-Rechnen.

Erste Abtheilung. Zahlensysteme. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren und Radiciren ganzer numerischer Zahlen.

Achtes Kapitel.

Anwendungen der Algebra auf die Auffindung der Eigenschaften und auf die Umformung der ganzen und der gebrochenen Funktionen eines einzigen Veränderlichen.

Neuntes Kapitel.

Von den allgemeinen Quadrat-Wurzeln. Von den imaginären Quadrat-Wurzeln. Auflösung der quadratischen Gleichungen. Eigenschaften der ganzen Funktionen vom 2ten Grade.

Erste Abtheilung. Von den allgemeinen und imaginären Quadratwurzeln. Auflösung der quadratischen Gleichungen.

Zweite Abtheilung. Von den ganzen Funktionen vom 2ten Grade.

Zwölftes Kapitel.

Dreizehntes Kapitel.

Die allgemeine Größenlehre.

Vierzehntes Kapitel.

Die allgemeine Größenlehre.

Anhang.

Allgemeine Einleitung.

1.

Der Begriff der Zahl ist ein einfacher Begriff, und uns gegeben; mit ihm der Begriff des Vielfachen und Einfachen.

2.

Jedes Ding, welches selbst keine Zahl, dagegen ein Vielfaches irgend eines andern Dinges ist, oder als ein solches betrachtet werden kann oder muß, heißt eine Größe (Quantitas); jenes andere Ding die Einheit oder das Gemäß; die Zahl des Vielfachen aber das Maaß dieser Größe, für diese Einheit (Gemäß).

3.

Die Wissenschaft, welche sich mit den Zahlen und den Größen beschäftigt, und welche lehrt, wie in gegebenen Zahlen und Größen andere davon abhängige Zahlen und Größen ausgedrückt werden, heißt Mathematik.

4.

Da aber die Vergleichung der Größen, insoferne die Größen an ihren Maaßen erkannt werden, auf die Vergleichung der Zahlen zurückkommt, so tritt die Lehre der Zahlen als ein allgemeiner Theil der Mathematik hervor, so daß die Größenlehre nur als ein besonderer Fall der Anwendung der erstern erscheint. Die Mathematik zerfällt daher

1. in die Zahlenlehre (Arithmetik, Analysis), welche ihr allgemeinster Theil ist, und
2. in die Größenlehre, welche größtentheils bloß als eine Anwendung der Zahlenlehre zur Vergleichung der Größen erscheint.

5.

Derjenige Theil der Zahlenlehre, der sich mit Aufstellung der ersten Principien beschäftigt, nach welchen Zahlen mit einander verbunden werden können, mag Elementar- oder niedere Zahlenlehre (oder allgemeine Arithmetik) heißen. Die höhere Zahlenlehre (Analysis) ist dann derjenige Theil, welcher lehrt, mittelst der gedachten Principien, Untersuchungen beliebiger Art über Zahlen anzustellen und zu beendigen *).

6.

Vereinigt man auf der andern Seite alle diejenigen Sätze, welche von allen Größen gelten, ohne Rücksicht zu nehmen auf eine besondere Gattung derselben, so hat man die allgemeine Größenlehre. Was dann von den Größen besonderer Art noch besonders stattfindet, gibt, wenn solches ausgesprochen wird, die besondere Größenlehre.

7.

Zeit und Raum sind als einfache Anschauungen uns gegeben. — Aus ihnen geht hervor, daß begrenzte Zeiten und begrenzte Räume, Größen sind.

---

*) Will man statt Zahlenlehre das fremde Wort Kalkul gebrauchen, wie solches in der neuesten Zeit zuweilen vorkommt, so kann dies geschehen: dann theilt sich der Kalkul in den niedern oder Elementarkalkul und in den höhern.

In der neuesten Zeit ist es hier und da gebräuchlich geworden, unter „höherer Zahlenlehre" die Aufstellung der Eigenthümlichkeiten der wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen zu verstehen, also das, was man früher „unbestimmte Analysis" genannt hat. — In diesem letzteren Sinne ist oben die Bedeutung von „höherer Zahlenlehre" nicht genommen.

8.

Stetige Ortsänderung heißt Bewegung. Die Ursache der Bewegung nennt man Kraft.

9.

Nach dem Satz des zureichenden Grundes beurtheilen wir die Ursachen nach ihren Wirkungen, folglich die Kräfte nach den Bewegungen die sie hervorbringen. Bewegungen unterscheiden wir aber durch die bestimmten Raumgrößen, welche in bestimmten Zeitgrößen zurückgelegt werden; folglich sind auch Kräfte Größen, die nach den vorgenannten Größen beurtheilt werden müssen.

10.

Man erhält hieraus zunächst 2 Haupttheile der besondern Größenlehre; nämlich: 1. die Raumgrößenlehre, 2. die Kraftgrößenlehre.

11.

Vergleicht man alles vorhergehende, so bekommt man folgendes Schema der Mathematik:

Mathematik.

I. Zahlenlehre (Arithmetik, Algebra und Analysis).
 1. Elementarzahlenlehre (Allgemeine und besondere Arithmetik und Algebra).
 2. Höhere Zahlenlehre (Höhere Algebra und Analysis).

II. Größenlehre.
 1. Allgemeine.
 2. Besondere.
  α. Raumgrößenlehre.
  β. Kraftgrößenlehre.

Anmerkung. Soll die Mathematik eine sogenannte Wissenschaft a priori, oder eine reine Vernunftwissenschaft bleiben, so darf man nicht Erfahrungssätze in sie aufnehmen. Unter die-

ser Voraussetzung hat man z. B. nicht mehr Mathematik, sondern Physik, sobald man in der Kraftgrößenlehre bestimmte, in der Natur wirkende Kräfte betrachtet, und so ist die Mathematik von ihrer Anwendung strenge geschieden, weshalb der Unterschied zwischen reiner und angewandter Mathematik in der Mathematik als reinen Vernunftwissenschaft nicht aufgestellt werden darf. Die Mathematik ist unter dieser Voraussetzung immer eine reine.

A.

Zahlen=Lehre.

Einleitung in die Zahlenlehre.

§. 1. Grundsatz.

Die Zahl und mit ihr die absolute (abstrakte) Einheit, wird hier, als uns gegeben angesehen. Die Einheit bezeichnet man durch das Zeichen 1 (Eins).

§. 2.

Die Zahlen erscheinen uns:

1. in einer Reihe, so daß wir, um zu einer zu gelangen, alle vorhergehenden von der Eins ab, an unserm Geiste vorübergehen lassen müssen; und wir nennen jede folgende Zahl die größere, so wie jede vorhergehende die kleinere;
2. als durch diese Folge von einander verschieden;
3. als mit einander verbindbar zu einer neuen Zahl.

§. 3. Erklärungen.

Zwei Zahlen können aber zunächst auf folgende Arten mit einander verbunden gedacht werden:

1. Man kann sie zu einander addiren, d. h. man kann sich eine Zahl denken, die so viele Einheiten hat, als die beiden gegebenen Zahlen zusammengenommen haben.
2. Es kann die eine mit der andern multiplizirt werden, d. h. man kann die eine so vielmal nehmen, als die andere anzeigt, und diese alle zu einander addiren.
3. Man kann die eine mit der andern potenziren; d. h. die eine so vielmal nehmen als die andere anzeigt, und diese alle mit einander multipliziren.

Diese 3 Verbindungsarten nennt man *direkte Operationen*, d. h. *direkte Verstandes-Thätigkeiten.*

Jede dieser direkten Operationen läßt aber wieder zwei *indirekte* oder umgekehrte zu, indem man von der dritten Zahl zu *jeder* der beiden erstern zurückkehren kann, wenn die andere gegeben ist. Dies gibt daher noch 6 indirekte Operationen, so daß im Ganzen 9 Operationen oder Verstandes-Thätigkeiten in ihrem Verhalten zu einander betrachtet werden müssen.

Man kann auf dieselbe Weise noch mehr, ja unendlich viele direkte Operationen einführen, von denen wieder eine jede zwei indirekte Operationen nothwendig in ihrem Gefolge hat. — Die Betrachtung dieser weiteren, von der Zahl abstrahirten Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) hat aber für den Zweck der Vergleichung der Größen keinen praktischen Werth.

§. 4.

1. Eine Haupt-Eigenschaft des Addirens, die auch dem Multipliciren zukommt, ist die, daß die beiden Zahlen, welche zu einander addirt oder mit einander multiplicirt werden sollen, mit einander vertauscht werden können, ohne daß die neu hervorgebrachte Zahl eine Aenderung erleidet.

Für die Addition versteht sich dies ohne Weiteres. — Für die Multiplikation erhellt diese Wahrheit aus dem Schema

• • • • • •
• • • • • •
• • • • • •
• • • • • •

in welchem die Anzahl der Punkte (Einheiten) stets dieselbe bleibt, man mag die Zahl derer in den einzelnen Horizontalreihen, oder die Zahl derer in den einzelnen Vertikalreihen zu einander addirt sich denken.

2. Dagegen können bei dem Potenziren zweier Zahlen diese beiden Zahlen nicht mit einander vertauscht werden, ohne daß auch das Resultat eine Aenderung erleidet.

3. Die in 1.) bemerkte Eigenschaft ist Ursache, daß die beiden indirekten Operationen, welche aus dem Addiren hervorgehen,

und auch die beiden indirekten Operationen, welche mit dem Multipliciren zugleich vorhanden sind, materiell sich nicht von einander unterscheiden, obgleich sie formell von einander wesentlich verschieden sind. Sie fallen daher materiell je beide in eine einzige zusammen, welche bezüglich subtrahiren und dividiren genannt werden.

4. Dagegen bleiben die beiden indirekten Operationen, welche mit dem Potenziren zugleich vorhanden sind, auch materiell stets von einander getrennt und verschieden und wir nennen sie bezüglich radiciren und logarithmiren.

5. Der allgemeinste Theil der Zahlenlehre (Arithmetik, Analysis) hat es daher mit dem Verhalten (den Gegensätzen und den Beziehungen) der sieben Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) zu thun, welche wir so eben das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren und Logarithmiren genannt haben. Er könnte die Rechnenwissenschaft genannt werden, in so ferne seine zweckgemäße Anwendung die Rechnenkunst liefert, sowohl die sogenannte Buchstaben-Rechnenkunst, als (später) auch die sogenannte gemeine (oder Ziffern-) Rechnenkunst.

§. 5. Erklärung.

Da aber die Zahlen und ihre Verbindungen Gegenstände unserer innern Anschauung sind, und nur dadurch zu Dingen außer uns werden, daß wir Zeichen für sie setzen, so geht die Zahlenlehre sogleich in eine Zahlzeichenlehre über, die nur in so ferne wieder zur Zahlenlehre wird, als durch die jedesmaligen Zahlzeichen in uns der Begriff des durch sie bezeichneten erregt werden kann.

Man bezeichnet aber die Zahlen, die man nicht in Bezug auf ihre Stelle in der Zahlenreihe unterscheiden kann oder will, durch beliebige für den Augenblick gewählte Zeichen; am bequemsten durch Buchstaben. Diese Zeichen heißen dann unbestimmte Zahlzeichen, zum Unterschiede von den bestimmten, welche be-

stimmte Zahlen der Zahlenreihe bezeichnen und welche wir in der Folge in Betrachtung ziehen wollen.

Es mag hier nur vorläufig bemerkt werden, daß wir die ersten auf einander folgenden Zahlen der Zahlenreihe durch die Zeichen

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

die wir Ziffern nennen und durch die entsprechenden Worte

Eins, Zwei, Drei, Vier, Fünf, Sechs, Sieben, Acht, Neun

ausdrücken oder vorstellen. — Die Definitionen dieser Zahlworte und Ziffern stehen dadurch fest, daß wir ihre Folge im Gedächtniß behalten.

§. 6.

Aus den einfachen bestimmten oder unbestimmten Zahlzeichen, werden nun andere zusammengesetztere und die zusammengesetztesten Zeichen oder Formen gebildet, dadurch, daß man je zwei derselben, mittelst der Operationszeichen (die noch von uns gewählt werden müssen) mit einander verbindet und diese Verbindung auch auf die zusammengesetzten Formen ausdehnt.

Jede solche einfache oder zusammengesetzte Form wird ein Ausdruck genannt.

§. 7.

Wir bezeichnen aber durch die Zeichen

$a+b$, $a \times b$ oder $a \cdot b$ oder ab, ferner a^b

zunächst die durch

addiren, multipliciren, potenziren

der beiden Zahlen a und b hervorgegangene Zahl. Wir nennen diese Formen

$a+b$, $a \times b$ oder $a \cdot b$ oder ab, a^b

bezüglich

Summe, Produkt und Potenz;

und man hat bereits a mit b bezüglich

addirt, multiplicirt oder potenzirt,

sobald man nur diese Zusammensetzungen sich gedacht und die dem Gedanken entsprechenden Formen

$a+b$, $a \cdot b$, a^b

hingeschrieben hat.

Ferner bezeichnen wir:

durch die Form $a-b$, die wir Differenz nennen, jeden Ausdruck, welcher zu dem Subtrahenden (oder zu welchem der Subtrahend) b addirt, den Minuenden a giebt;

durch die Form $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, welche wir Quotient nennen, jeden Ausdruck, der mit dem Divisor (oder mit welchem der Divisor) b multiplicirt, den Dividenden a giebt; ferner

durch die Form $\sqrt[b]{a}$, die wir Wurzel nennen, jeden Ausdruck, welcher mit dem Wurzel-Exponenten b potenzirt, den Radikanden a giebt;

endlich durch die Form $\overset{b}{log}\,a$, die wir Logarithme nennen, jeden Ausdruck, mit welchem die Basis b potenzirt werden muß, wenn der Logarithmand (der Numerus) a kommen soll;

und man hat bereits b von a subtrahirt, oder a durch b dividirt, oder a durch b radicirt (die b^{te} Wurzel aus a gezogen), endlich a durch b logarithmirt (den Logarithmen von a für die Basis b genommen), — sobald man nur diese Ausdrücke

$a-b$, $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{log}\,a$

sich gedacht und hingeschrieben hat.

In der Summe $a+b$ heißen a und b selbst die Summanden; in dem Produkt $a \times b$, $a \cdot b$ oder ab heißen a

und b die Faktoren (auch der Multiplikator und Multiplikand); in der Potenz a^b endlich wird a der Dignand, b dagegen der Exponent genannt. — Wie die Theile der Differenz (a—b), des Quotienten $\left(\frac{a}{b}\right)$ oder a:b, der Wurzel $\left(\sqrt[b]{a}\right)$ und des Logarithmen $\left(\overset{b}{log}\,a\right)$ genannt werden, ist oben schon bei den Definitionen dieser letzteren zu ersehen gewesen.

§. 8.

Zwei Ausdrücke (Formen) sind einander gleich, wenn sie verschieden von einander sind in der Form, aber einerlei sind in der Bedeutung, also wenn sie, so lange sie wirkliche Zahlen vorstellen, alle beide eine und dieselbe wirkliche Zahl bedeuten. — Um die Gleichheit zweier Ausdrücke anzudeuten, verbindet man sie durch das Zeichen (=), welches das Gleichheitszeichen genannt wird, und so entsteht die Gleichung.

Eine Gleichung lehrt uns also allemal nichts anderes, als daß die Ausdrücke auf beiden Seiten des (=) Zeichens, trotz der Verschiedenheit ihrer Formen, doch einerlei sind in ihrer Bedeutung und daher für einander gesetzt werden können.

Anmerkg. Namentlich können die in N. 1. des §. 4. ausgesprochenen Wahrheiten nun auch so geschrieben werden, nämlich

I. $a+b = b+a$;

II. $a \cdot b = b \cdot a$.

§. 9.

Einen gedachten, also auch einen hingeschriebenen Ausdruck umformen, d. h. stets neue Formen finden, welche statt einer gedachten oder gegebenen Form gesetzt werden können, ohne daß man dadurch mit den Denkgesetzen in Widerspruch zu gerathen fürchten muß, — dieses Geschäft nennt man das „Rechnen." — Solches kann mit allgemeinen Ausdrücken stattfinden und wird dann Buchstabenrechnen genannt, oder es kann mit Aus-

drücken stattfinden, die bloß bestimmte Zahlzeichen (Ziffern) enthalten und es wird dann das gemeine (oder Ziffern-) Rechnen genannt.

Um aber „rechnen" zu können, dazu bedarf es einer Anzahl von (Grund-) Gleichungen, welche auf der einen Seite des (=) Zeichens alle möglichen d. h. alle denkbaren einfacheren Zusammensetzungen enthalten, auf der anderen aber diejenigen Formen oder Ausdrücke, in welche die ersteren umgeformt werden können. — In so ferne diese (Grund-) Gleichungen als Muster dienen, werden sie Formeln genannt.

Anmerkg. Es wird später gezeigt werden, daß diese Formeln, welche die Gesetze des „Rechnens" aussprechen, nie etwas anderes enthalten, als: wie die sieben Operationen (Verstandes-Thätigkeiten), die bei den Zahlen zuerst wahrgenommen d. h. von den Zahlen abstrahirt worden sind, sich zu einander verhalten, d. h. in welchen Gegensätzen und Beziehungen sie zu einander stehen. — Die weiteren Gleichungen, welche aus der Anwendung dieser Formeln (also durch das „Rechnen") entstehen, können dann natürlich auch nur dasselbe ausdrücken, nur in mehr oder minder verwickelter, oder, — in so ferne bei den Ziffern noch die specielle Bedeutung der Ziffern hinzutritt, — auf eine mehr oder minder getrübte Weise. — Vorläufig aber denken wir uns stets durch jeden Ausdruck eine wirkliche (sogenannte ganze, unbenannte) Zahl vorgestellt.

§. 10.

Die in dem §. 7. gegebenen Definitionen führen augenblicklich zu folgenden Gleichungen:

I. 1. $(a-b)+b = a;$ **I. 2.** $\frac{a}{b}\cdot b = a;$

I. 3. $(\sqrt[b]{a})^b = a;$ **I. 4.** $b^{(\overset{b}{log}\, a)} = a,$

welche vier Formeln sich logisch durch nichts von einander unterscheiden, und alle vier nur den Gegensatz zwischen der direkten

und der durch sie bedingten indirekten Operation (Verstandes-Thätigkeit) aussprechen; und da sie alle vier nichts anders enthalten, als die Definitionen von $a-b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\, a$ des §. 7., so bedürfen sie keines Beweises.

Derselbe logische Gegensatz spricht sich aber auch aus in den folgenden vier Gleichungen, nämlich in

II. 1. $(a+b)-b = a$; II. 2. $\frac{ab}{b} = a$;

II. 3. $\sqrt[b]{(a^b)} = a$; II. 4. $\overset{b}{log}(b^a) = a$;

nur daß hier die direkte Operation jedesmal zuerst gedacht und dann von der indirekten unmittelbar gefolgt ist. Diese Formeln bedürfen daher eines Beweises, der darin besteht, daß man sich überzeugt, wie jedesmal der Ausdruck zur Rechten die Eigenschaft hat, welche die Differenz, oder der Quotient, oder die Wurzel, oder der Logarithme zur Linken ausdrücken, — welcher Beweis jedoch einem Jeden sofort in die Augen springt.

Der logische Gegensatz zwischen den beiden indirekten Operationen, welche jede direkte Operation (Verstandes-Thätigkeit) in ihrem Gefolge hat, unter sich, spricht sich in nachstehenden vier Formeln aus, nämlich

III. 1. $a-(a-b) = b$; III. 2. $a : \frac{a}{b} = b$;

III. 3. $\overset{(\sqrt[b]{a})}{log}\, a = b$; III. 4. $\sqrt[(\overset{b}{log}\, a)]{a} = b$,

wo jede der beiden letztern in die erstere übergehen, wenn man statt der beiden verschiedenen indirekten Operationen des Radicirens und des Logarithmirens die beiden Subtraktionen setzt, die (nach §. 5.) materiell nicht von einander verschieden sind; — eben so geht jede der beiden letztern Formeln auch in die zweite über, wenn man statt der beiden indirekten Operationen des Logarithmirens und Radicirens die beiden Divisionen setzt (die sich materiell durch nichts von einander unterscheiden).

Auch diese Formeln werden dadurch erwiesen, daß man sich überzeugt, wie der Ausdruck zur Rechten des Gleichheits-Zeichens, die Eigenschaft hat, welche durch den Ausdruck links, den Definitionen des §. 7. gemäß, vorgestellt ist. Da dies Ergebniß aber wiederum einem Jeden in die Augen springt, der den Versuch macht, so haben wir hier nichts weiter mehr hinzuzufügen.

§. 11.

Geht man nun zu Verbindungen dreier Elemente (Zahlen) über, so ist erstlich zu bemerken, daß man immer nur zuerst zwei derselben mit einander und dann das Resultat erst mit dem dritten verbinden kann.

Für die Addition und Multiplikation gilt nun wieder die Hauptwahrheit, daß es für das Endresultat ganz einerlei ist, ob man die Verbindung in dieser oder in jeder anderen Ordnung vornimmt, und diese Wahrheit dehnt sich auch auf Verbindungen von 4 und mehr Elementen (Zahlen) aus. Wir sehen dies ausgedrückt in den Grundgleichungen

$$(a+b)+c = (a+c)+b = a+(b+c);$$

und $$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b = a \cdot (b \cdot c).$$

Die erstere versteht sich von selbst und sie folgt unmittelbar aus dem Begriff des Addirens. Die andere dagegen folgt aus der Betrachtung des Schema

$$\begin{matrix} a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a \\ a & a & a & a & a & a \end{matrix}$$

nach welchem man offenbar immer dieselbe Menge von a hat, ob man erst die a in jeder Horizontalreihe zusammennimmt und dann erst die Resultate der einzelnen Horizontalreihen zusammenfaßt, oder ob man zuerst die a in jeder Vertikalreihe zusammenfaßt, und dann erst die Resultate der einzelnen Vertikalreihen addirt.

Das analoge Gesetz gilt für das Potenziren nicht*).

---

*) Es ist zwar $(a^b)^c = (a^c)^b$ aber nicht $= a^{(b^c)}$; und daß die erstern beiden einander gleich sind, verdankt man, wie wir seiner Zeit sehen werden, wiederum nur dem Umstande, daß $b \cdot c = c \cdot b$ ist.

§. 12.

Das Verhalten der Addition und Subtraktion zu einander.

Das Hauptgesetz der Addition (des §. 11.) in Verbindung mit dem Gegensatz der Addition und Subtraktion (I. 1. und II. 1. des §. 10.) führt nun sogleich zu folgenden Resultaten zwischen 3 Elementen (Zahlen), nämlich:

I. $(a+b)+c=(a+c)+b=a+(b+c);$

II. $(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c)=a+(c-b);$

III. $(a+b)-c=(a-c)+b=a+(b-c);$

IV. $(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c);$

V. $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c).$

Man erkennt aber die Richtigkeit dieser Formeln, sobald man zu zweien Ausdrücken in jeder Zeile, ein und dasselbe addirt (nämlich den Subtrahenden einer der vorkommenden Differenzen), die Resultate aber nach der Formel I. (d. h. nach §. 11.) und mittelst der I. 1. des §. 10. umformt und sich dadurch überzeugt, daß man bei jedem ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 13.

Das Verhalten der Multiplikation und Division zu einander.

Schreibt man die Formeln I.—V. des §. 12. ab, aber so, daß man jetzt überall bezüglich „multiplicirt" und „dividirt", wo dort „addirt" und „subtrahirt" ist, so erhält man:

I. $(ab)c=(ac)b=a(bc);$

II. $\frac{a}{b}\cdot c=\frac{ac}{b}=a:\frac{b}{c}=a\cdot\frac{c}{b};$

III. $\frac{ab}{c}=\frac{a}{c}\cdot b=a\cdot\frac{b}{c};$

IV. $\frac{a}{b}:c=\frac{a:c}{b}=\frac{a}{bc};$

V. $\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a:c}{b:c}.$

Die Formel I. ist die bereits als wahr erkannte des §. 11. — Die übrigen Formeln beweisen sich dadurch, daß man zwei der in einer Zeile stehenden

drei Ausdrücke mit einem und demselben (dem Divisor eines der vorkommenden Quotienten) multiplicirt, und sich (mittelst der Umformung nach I. und nach der I. 2. des §. 10.) überzeugt, daß man überall ein und dasselbe Resultat erhält.

Anmerkg. Man kann sich nicht wundern, daß die vorstehenden Gesetze, aus denen des §. 12. durch bloßes Umschreiben erhalten werden konnten, da die beiden Formeln, nämlich die zweite des §. 11. und I. 2. des §. 10., durch welche allein alle übrigen erwiesen werden, aus den analogen Formeln, nämlich aus der erstern des §. 11. und aus der I. 1. des §. 10. ebenfalls durch bloßes Umschreiben erhalten werden können.

§. 14.

Gesetze des Zusammenhangs der beiden letztern Operationen mit den beiden erstern.

Der Zusammenhang der letztern beiden Operationen mit den beiden ersteren spricht sich in nachstehenden Formeln aus, nämlich:

I. $(a+b)c = ac+bc$; II. $(a-b)c = ac-bc$;

III. $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c}+\frac{b}{c}$; IV. $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c}-\frac{b}{c}$;

V. $a+\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$; VI. $a-\frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$;

VII. $\frac{A}{B} = z+\frac{A-Bz}{B}$.

Die I. folgt unmittelbar aus dem Begriff des Produkts in Verbindung mit der Haupteigenschaft des Addirens (§. 11.), in so ferne es einerlei ist, ob man c mal die Summe $a+b$ nimmt, oder zuerst alle a und dann noch alle b zusammen addirt. — Die II. wird dadurch bewiesen, daß man auf beiden Seiten bc addirt, und sich mittelst der I. überzeugt, daß die zur Linken erhaltene Summe $(a-b)c+bc$, $=[(a-b)+b]\cdot c$ d. h. $=ac$ ist; eben dasselbe kommt zur Rechten heraus. — Die übrigen Formeln beweisen sich alle dadurch, daß man beide Seiten der Gleichung mit einem und demselben Ausdruck (nämlich mit dem Divisor eines der vorkommenden Quotienten) multiplicirt und sich mittelst der hiesigen Formeln I. und II. und der I. 2. des §. 10. überzeugt, daß man auf beiden Seiten ein und dasselbe Resultat erhält.

§. 15.

Der Zusammenhang der drei letztern Operationen mit den vier erstern.

Der Gegensatz zwischen den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, welcher in seiner einfachsten Gestalt bereits in den Formeln I. 3. I. 4. II. 3. II. 4. endlich III. 3. und III. 4. des §. 10. ausgesprochen sich sieht, — ferner die Beziehungen dieser drei letztern Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) zu den vier erstern, sind für drei Elemente in folgenden Gleichungen ausgesprochen, nämlich:

I. $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$; II. $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$;

III. $(ab)^c = a^c \cdot b^c$; IV. $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$;

V. $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$.

Ferner:

VI. $\sqrt[c]{(ab)} = \sqrt[c]{a} \cdot \sqrt[c]{b}$; VII. $\sqrt[c]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[c]{a}}{\sqrt[c]{b}}$;

VIII. $\sqrt[c]{(a^b)} = a^{\frac{b}{c}} = \left(\sqrt[c]{a}\right)^b$; IX. $\sqrt[c]{\sqrt[b]{a}} = \sqrt[bc]{a} = \sqrt[b]{\sqrt[c]{a}}$;

X. $\sqrt[b]{a} = \sqrt[bc]{(a^c)} = \sqrt[b:c]{\sqrt[c]{a}}$; XI. $a \cdot \sqrt[c]{b} = \sqrt[c]{(a^c \cdot b)}$;

XII. $\frac{\sqrt[c]{b}}{a} = \sqrt[c]{\frac{b}{a^c}}$.

Endlich

XIII. $\overset{c}{log}(ab) = \overset{c}{log}\, a + \overset{c}{log}\, b$;

XIV. $\overset{c}{log}\left(\frac{a}{b}\right) = \overset{c}{log}\, a - \overset{c}{log}\, b$;

XV. $\overset{c}{log}(a^b) = b \cdot \overset{c}{log}\, a$;

XVI. $\overset{c}{log}\sqrt[b]{a} = \frac{\overset{c}{log}\, a}{b}$;

XVII. $\overset{c}{log}\, a = \overset{b}{log}\, a \cdot \overset{c}{log}\, b$.

Die Formeln I. III. folgern unmittelbar aus dem Begriff der Potenz (§§. 3. und 7.) in Verbindung mit dem Satze, nach welchem es einerlei ist, in welcher Ordnung man multiplicirt. — Bei der Formel V. muß man noch das Gesetz I. zu Hilfe nehmen, um das Produkt $a^b \cdot a^b \cdot a^b \cdot a^b \cdots$ in $a^{b+b+b+b+\cdots}$ umzuformen. — Die Formeln II. und IV. werden dadurch erwiesen, daß man beide Seiten der Gleichung mit dem Divisor multiplicirt, die Formeln I. und III. in Anwendung bringt, so wie die Formeln I. 1. und I. 2. des §. 10. und sich dadurch überzeugt, daß auf beiden Seiten ein und dasselbe herauskommt.

Die Formeln VI.—XII. erweisen sich dadurch, daß man in jeder die beiden Seiten mit einem Wurzel-Exponenten potenzirt, dabei die Gesetze I.—V. der Potenzen anwendet auch noch die Formel I. 3. des §. 10. und sich dadurch überzeugt, daß dann links und rechts ein und derselbe Ausdruck sich ergiebt.

Die Formeln XIII.—XVII. endlich beweisen sich dadurch, daß man eine Basis der vorkommenden Logarithmen mit beiden Seiten der Gleichung potenzirt, nachher die Gesetze der Potenzen I.—V. anwendet und noch die Formeln I. 4. und I. 3. des §. 10. und so sich wieder überzeugt, daß auf beiden Seiten ein und derselbe Ausdruck sich ergiebt *).

§. 16.

Betrachtet man diese Formeln der §§. 10.—15. aus dem praktischen Gesichtspunkte, so findet man, daß sie zum Gebrauche des „Rechnens" (d. h. nach §. 9. des Umformens gedachter oder gegebener Ausdrücke) nicht bloß völlig unentbehrlich sind, sondern auch ziemlich ausreichen.

Man hat nämlich die sieben zusammengesetzten Formen $a+b$, $a-b$, ab, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$, $\overset{b}{log}\,a$ und den einfachen Ausdruck

---

*) Potenzirt man z. B. c mit dem Produkt $\overset{b}{log}\,a \cdot \overset{c}{log}\,b$ zur Rechten in der Formel XVII., so muß man (nach V.) zuerst c mit dem einen Faktor $\overset{c}{log}\,b$ potenziren, — dies giebt aber (nach §. 10. I. 4.) b, — und das (b), was herauskommt, auch noch mit dem andern Faktor $\overset{b}{log}\,a$ potenziren, und dadurch erhält man a (nach §. 10. I. 4.). — Wenn man aber c mit dem Ausdruck $\overset{c}{log}\,a$ zur Linken in XVII. potenzirt, so erhält man (nach §. 10. I. 4.) ebenfalls nichts anders als a. — Also müssen beide Ausdrücke rechts und links (in XVII.) eine und dieselbe Zahl bezeichnen.

(c); und es kann daher der einfache Ausdruck (c) mit jeder dieser sieben Formen durch jede der sieben Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) in Verbindung treten; dies giebt siebenmal sieben oder 49 Verbindungen, von denen aber die durch das Potenziren, so wie die durch die vier indirekten Operationen zusammengesetzten in zweifacher Form genommen werden müssen z. B. $\frac{ab}{c}$ und $\frac{c}{ab}$, eben so $(a+b)^c$ wie auch c^{a+b}. — Unter diesen Verbindungen befinden sich z. B.

$(a\pm b)+c$; $(a\pm b)-c$; $(a\pm b)c$; $\frac{a\pm b}{c}$, $(a\pm b)^c$,

$\sqrt[c]{a\pm b}$ und $\overset{c}{log}(a\pm b)$; ferner $ab\pm c$; $(ab)\cdot c$, $\frac{ab}{c}$, $(ab)^c$,

$\sqrt[c]{(ab)}$, $\overset{c}{log}(ab)$; ferner $\frac{a}{b}\pm c$; $\frac{a}{b}\cdot c$; $\frac{a}{b}:c$; $\left(\frac{a}{b}\right)^c$;

$\sqrt[c]{\frac{a}{b}}$, $\overset{c}{log}\frac{a}{b}$; ferner $c\pm\sqrt[b]{a}$; $c\cdot\sqrt[b]{a}$; $\frac{\sqrt[b]{a}}{c}$; $(\sqrt[b]{a})^c$;

$\sqrt[c]{(\sqrt[b]{a})}$; $\overset{c}{log}(\sqrt[b]{a})$; u. s. w. f.

Die vorgedachten Formeln §§. 10.—15. enthalten aber diese denkbaren Verbindungen zum größten Theil auf einer der Seiten der Gleichheitszeichen, während auf der andern Seite derselben (=) Zeichen die Ausdrücke stehen, welche man statt des erstgedachten setzen darf, mit der Ueberzeugung, daß man dadurch mit den Denkgesetzen in Uebereinstimmung handelt.

Hätte man aber zwei zusammengesetzte Ausdrücke z. B. $a-b$ und $c-d$ mit einander zu verbinden, z. B. $(a-b)+(c-d)$ oder $(a-b)-(c-d)$, oder $(a-b)\cdot(c-d)$, oder dergl., so würde man erst einen derselben z. B. $c-d$ als einen einfachen Ausdruck ansehen, also ihn an die Stelle des vorhergehenden c setzen, und man würde mittelst der aufgestellten Formeln (dasmal des §. 12.) sogleich haben (indem man dieselben wiederholt anwendet)

I. $(a-b)+(c-d) = [a+(c-d)]-b = [(a+c)-d]-b$
$= (a+c)-(b+d)$;

II. $(a-b)-(c-d) = [a-(c-d)]-b = [(a-c)+d]-b$
$= [(a+d)-c]-b = (a+d)-(b+c);$

III. $(a-b)(c-d) = a(c-d)-b(c-d) = (ac-ad)-(bc-bd)$
$= (ac+bd)-(ad+bc);$

u. s. w.

Eben so würde sich z. B. finden aus der wiederholten Anwendung der Formeln des §. 13.

$$\text{IV.}\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot\frac{c}{d}}{b} = \frac{\left(\frac{ac}{d}\right)}{b} = \frac{ac}{bd}$$

und

$$\text{V.}\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c};$$

u. s. w. f.

Einige der zum „Rechnen" (d. h. zum Umformen gedachter oder gegebener Ausdrücke) nothwendigen Formeln müssen später noch nachgeliefert werden, z. B. die zur Umformung der Ausdrücke $(a\pm b)^c$, u. dergl. erforderlichen.

Im Besitze dieser Formeln der §§. 12.—15. würde also dem praktischen „Rechnen" durchaus kein Hinderniß mehr entgegenstehen, d. h. wir würden die praktischen Regeln des Buchstaben-, wie des gemeinen (Ziffern-) Rechnens ohne Weiteres erfinden und die gefundenen wiederum verwenden können, wenn wir nur noch über einen einzigen Punkt im Reinen wären.

Es ist nämlich aus der Art der Herleitung der Formeln der §§. 10.—15. (nach denen künftig „gerechnet" werden muß), klar und keinem Zweifel unterworfen, daß alle jene Formeln wahr sind, so lange wir voraussetzen, daß alle vorkommenden Ausdrücke wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen, in welchem Falle jede Gleichung nichts weiter sagt, als daß die beiden Ausdrücke links und rechts vom (=) Zeichen, obgleich in der Form von einander verschieden, doch eine und dieselbe ganze Zahl vorstellen.

Auf der andern Seite fällt aber ebenfalls in die Augen,

daß, wenn a und b beliebige (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen, dann die Differenz $a-b$, der Quotient $\frac{a}{b}$, die Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und der Logarithme $\overset{b}{log}\,a$ nicht immer, ja sehr selten eine wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellen werden, wenn auch die Summe $a+b$, das Produkt $a \cdot b$ und die Potenz a^b stets mit a und b zugleich wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen ausdrücken.

Endlich aber erscheint es dem aufmerksamen Beobachter so, als wenn die Gleichungen der §§. 10.–15. das Verhalten der, von der Betrachtung der wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen abstrahirten sieben Verstandes-Thätigkeiten ausdrücken müßten, auch wenn von dem Dasein irgend einer wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahl ganz abstrahirt wird, (wenn sie auch vielleicht bei einer näheren Untersuchung hin und wieder einer Modifikation bedürftig gefunden werden sollten) — daß daher die Begriffe „Summe", „Differenz", „Produkt", „Quotient", „Potenz", „Wurzel" und „Logarithme", desgleichen der Begriff der „Gleichung" und die Begriffe „Addiren", „Subtrahiren", „Multipliciren", „Dividiren", „Potenziren", „Radiciren" und „Logarithmiren" einer Verallgemeinerung bedürfen und auch deren fähig sein dürften, wodurch sie unabhängig werden von der Bedeutung der einzelnen Buchstaben und dadurch auch unabhängig von einer in den Anwendungen unmöglich zu erfüllenden Bedingung, daß nämlich alle Ausdrücke wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen. — Gelingt diese Verallgemeinerung, so werden wir in den Gleichungen der §§. 10.–15. (entweder so wie sie dort gefunden sind, oder nachdem sie eine Modifikation erlitten haben) die allgemeinen Gesetze haben, nach denen beliebig gedachte oder gegebene Ausdrücke zweckgemäß umgeformt werden, d. h. nach denen „gerechnet" werden kann und muß.

Gehen wir aber zu den Gesetzen des Denkens, also zur Logik zurück, so finden wir, daß die allgemeineren Begriffe erhalten werden, wenn man aus dem besonderen Begriff ein

oder einige Merkmale wegläßt und die übrigen Merkmale, — vorausgesetzt, daß sie sich einander im Allgemeinen nicht widersprechen, also nicht unvereinbar sind, — in den neuen (und allgemeineren) Begriff vereinigt.

Nun gehört aber z. B. zu den Merkmalen der bis jetzt definirten Summe $a+b$ und des Produkts $a \cdot b$, erstens diese bestimmte Form, zweitens die Eigenschaften, daß man $a+b$ mit $b+a$, und $a \cdot b$ mit $b \cdot a$, ferner $(a \pm b)c$ mit $ac \pm bc$, endlich $(a+b)+c$ mit $(a+c)+b$ und mit $a+(b+c)$, so wie auch, daß man $(ab)c$ mit $(ac)b$ und noch mit $a(bc)$ vertauschen kann, ohne dadurch zu Widersprüchen geführt werden zu können; zuletzt gehört noch dazu, daß $a+b$ und ab wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen.

Eben so gehört zu den Merkmalen der Differenz $a-b$ und des Quotienten $\frac{a}{b}$, erstens die bestimmte Form dieser Ausdrücke, dann die Eigenschaften, daß man $(a-b)+b$ mit a und auch $\frac{a}{b} \cdot b$ mit a vertauschen kann, ohne dadurch zu Widersprüchen geführt werden zu können, — zuletzt, daß auch sie wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen bezeichnen.

Läßt man daher nun von diesen vier Begriffen die letztern Merkmale weg, nämlich, daß die Ausdrücke wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen bezeichnen sollen, und weist man nach, daß die übrigen aufgezählten Merkmale in keinem besonderen Falle sich widersprechen können, so hat man die allgemeineren Begriffe der Summe, der Differenz, des Produkts und des Quotienten.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch noch in Bezug auf die drei Begriffe der Potenz, der Wurzel und des Logarithmen anstellen, um sich von dem besonderen Falle derselben, wo sie Ausdrücke sind, die wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen bezeichnen, zu den allgemeinsten Begriffen zu erheben.

Hat man aber diese allgemeinsten Begriffe der Summe $a+b$, der Differenz $a-b$, des Produkts $a \cdot b$, des Quo-

tienten $\frac{a}{b}$, der Potenz a^b, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ und des Logarithmen $\overset{b}{log}\,a$ aufgestellt, und versteht man dann unter „addiren", „subtrahiren", „multipliciren", „dividiren", „potenziren", „radiciren" (Wurzel-Ausziehen) und „logarithmiren" zweier Ausdrücke a und b (d. h. b zu a, b von a, b mit a, a durch b) nie etwas anderes als das Bilden im Gedanken und dann das, dem entsprechende Hinschreiben der Formen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ oder ab oder $a \times b$, $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\,a$, so sind die Begriffe der Operationen zugleich mit den Begriffen verallgemeinert, die wir mit diesen hingeschriebenen Formen verknüpfen müssen, d. h. mit den Formen, die wir bezüglich Summe, Differenz, Produkt, Quotient, Potenz, Wurzel und Logarithme nennen; — so daß wir nur die allmähliche Verallgemeinerung dieser letztern Begriffe zu erzielen haben. — Außerdem wird noch die Verallgemeinerung des Begriffs der „Gleichung" nothwendig*).

§. 17.

Indem wir aber in der Folge die Bedeutung der Ausdrücke $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\,a$ viel allgemeiner und so auffassen, daß jeder derselben einen Inbegriff unter sich verträglicher Merkmale (Eigenschaften) vorstellt und nur in

---

*) Wer also z. B. geschrieben hat die Summe 23+56, der hat bereits 23 und 56 zu einander addirt; wer diese Summe 23+56 in die Summe 70+9 oder 79 umformt, der „rechnet", aber er addirt nicht mehr. — Eben so hat der allein 23 mit 56 multiplicirt, welcher das Produkt 23·56 oder 23×56 gedacht und hingeschrieben hat; wer aber dieses Produkt 23×56 in die Summe 1000+200+80+8 d. h. 1288 umformt, der „rechnet", aber er multiplicirt nicht. — Wer das Produkt 23×56 sich bloß denkt und dann sogleich in die Summe 1288 umformt, der multiplicirt und rechnet zugleich.

einem ganz besonderen Falle auch noch eine wirkliche (ganze) Zahl bedeuten kann, verallgemeinern wir hier schon den Begriff der „Gleichung" dahin

> daß wir zwei, mittelst der (sieben) Operationszeichen beliebig zusammengesetzte Ausdrücke einander gleich nennen und sie mittelst des (=) Zeichens zur „Gleichung" verbinden (während bei den Ausdrücken selbst von dem Merkmale, daß sie wirkliche (ganze) Zahlen vorstellen gänzlich abstrahirt wird und solche also viel allgemeiner aufgefaßt sind) — sobald diese Ausdrücke in der „Rechnung" (im Sinne des §. 9.) unbedingt und mit dem Bewußtsein für einander gesetzt werden können, daß man dadurch den Gesetzen des Denkens gemäß handle und deshalb nie zu Widersprüchen geführt werden könne *).

Diesen Begriff der (allgemeinsten) Gleichung müssen wir also in der Folge unabläßig fest halten.

Aus diesem allgemeinsten Begriff der Gleichung geht aber auch noch hervor:

1) Wenn zwei Ausdrücke einem dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

2) Gleiches mit Gleichem mittelst einer jeden der 7 Operationen verbunden, giebt jedesmal wiederum Gleiches.

---

*) D. h. man muß bei einer solchen allgemeinen Gleichung überzeugt sein, daß, wenn in irgend einer Anwendung sie selbst oder irgend eine der aus ihr abgeleiteten Gleichungen links und rechts wirkliche Zahlen liefert, dann auch nothwendig links und rechts vom (=) Zeichen eine und dieselbe wirkliche Zahl vorgestellt ist.

Erstes Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen (Operationen) der ersten Art, d. h. vom Addiren und Subtrahiren. — Von der Null und von den additiven und subtraktiven Ausdrücken. — Von den algebraischen Summen. — Von der positiven und negativen ganzen Zahl.

Vorerinnerung.

Die Vorerinnerungen zu den einzelnen Kapiteln sollen jedesmal kurz und anschaulich die Gründe angeben, aus welchen das Kapitel gerade dieses und nicht anderes geben durfte, wenn die, das Ganze leitende Idee mit Consequenz verfolgt werden sollte.

Man begreift aber leicht, daß, wenn dieses Werk die Absicht hat, was für die Zahlen und Größen gilt, in einer folgerechten Kette, zu zeigen, — solches nicht mit der gemeinen Rechenkunst beginnen dürfe, weil die Gesetze, nach denen sich die Operationen richten und auf welche die Verfahrungsarten der gemeinen Rechenkunst sich gründen, vorher entwickelt worden sein müssen. — Es gibt daher dieses Kapitel zuerst das allgemeine Verhalten des Addirens und Subtrahirens zu einander, und überläßt es einem spätern Kapitel, dieses allgemeine Verhalten der Operationen anzuwenden, um die entsprechenden praktischen Verfahrungsarten des gemeinen (und des sogenannten Buchstaben-) Rechnens daraus abzuleiten.

Die nothwendigste Folge dieser Ansicht ist: daß man aus der gemeinen Rechenkunst nichts voraussetzen darf, also namentlich auch nicht den Begriff der Null, weil gerade die hiesigen Untersuchungen ihn erst geben müssen, und ihn auf eine Art geben, wie er nachgehends durchaus und überall, in der gemeinen Rechenkunst wie im höhern Kalkul, ohne alle Abänderung oder Modifikation in Anwendung kommt.

Aber eben so wenig darf hier irgend etwas aus der Buchstaben-Rechenkunst vorausgesetzt werden, also namentlich auch nicht die Bedeutung von $+b$ und $-b$, eben weil es der Rechnen-Wissenschaft, die zuerst getrieben

werden muß, zukommt, die Möglichkeit der Rechnenkunst nachzuweisen, d. h. die Rechnenkunst mit Vernunftnothwendigkeit zu liefern.

§. 18.

Nach den Gesetzen der Logik bekommt man allgemeinere Begriffe aus besonderen, wenn man von letzteren ein oder einige Merkmale wegläßt und die übrigen Merkmale in den neuen Begriff zusammenfaßt.

Nun hat aber die Summe $a+b$ des §. 7. als wesentliche Merkmale: erstens diese bestimmte Form, dann daß $a+b$ mit $b+a$ und $(a+b)+c$ mit $(a+c)+b$ und auch mit $a+(b+c)$ vertauscht werden kann, ohne daß man dadurch mit den Denkgesetzen in Widerspruch steht, — endlich aber auch, daß sie eine von a und b auf eine bestimmte Weise abhängige wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellt oder bezeichnet. — Lassen wir nun das letztere Merkmal weg und fassen wir die übrigen Merkmale in den neuen Begriff zusammen, so haben wir den allgemeineren Begriff, den wir allgemeine Summe nennen wollen und der in die frühere besondere Summe übergehen soll, so oft a und b wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen vorstellen. — Die beiden Theile, aus denen die Summe zusammengesetzt ist, mögen noch immer ihre Summanden heißen; — diese allgemeine Summe bilden (im Verstande) und hinschreiben, mag noch immer das „addiren" (a zu b, oder b zu a) genannt werden.

§. 19.

Die allgemeine Differenz $a-b$, in welcher noch immer a der Minuend und b der Subtrahend genannt wird, stelle von nun an bloß die Eigenschaft vor (also auch jeden Ausdruck, der diese Eigenschaft hat) nämlich zu b (im Sinne des §. 18.) addirt, a zu geben, d. h. eine Summe $(a-b)+b$ zu geben, welche mit a selbst (in der „Rechnung") vertauscht werden kann.

Unter „subtrahiren b von a" verstehen wir jedesmal

das Bilden dieser Differenz $a-b$ (im Verstande) und das **Hinschreiben** derselben.

§. 20.

Aus diesen Begriffen und Sätzen (der §§. 18. und 19.) folgt aber unmittelbar mit Zuziehung der NN. 1. und 2. des §. 17. die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen

1) $a+b = b+a$ (§. 8. Anmerkg. I.)

$$\left.\begin{array}{ll} 2) & (a-b)+b = a \\ 3) & (a+b)-b = a \\ 4) & a-(a-b) = b, \end{array}\right\} \text{(§. 10. I. 1., II. 1. und III. 1.)}$$

welche wir im vorigen Kapitel als Rechnungsformen für die Addition und Subtraktion zwischen zwei Elementen hingestellt, dort aber nur unter der Voraussetzung gefolgert hatten, daß alle einzelnen Ausdrücke wirkliche Zahlen bedeuten, während jetzt die Buchstaben bloße Träger der Operationszeichen sind, gar keine bestimmte Bedeutung haben und daher jedes Beliebige vorstellen können.

Die Gleichung 1.) drückt die Haupteigenschaft des Addirens, die Gleichungen 2.–4. dagegen drücken den Gegensatz aus, der zwischen den beiden allgemeinen Begriffen der Addition und Subtraktion stattfindet.

§. 21.

Zwischen drei Elementen a, b und c finden nun aber sogleich auch noch die Gleichungen (Rechnungsformeln) I.–V. des §. 12. als allgemeine Gleichungen statt, die da gelten, wenn auch a, b, c bloße Träger der Operationszeichen sind, gar keine bestimmte Bedeutung haben, und für welche daher später auch jeder denkbare Ausdruck gesetzt werden kann, — nämlich die Gleichungen

5) $(a+b)+c = (a+c)+b = a+(b+c)$;

6) $(a+b)-c = (a-c)+b = a+(b-c)$;

7) $(a-b)+c = (a+c)-b = a-(b-c) = a+(c-b)$;

8) $(a-b)-c = (a-c)-b = a-(b+c)$;

9) $a-b = (a+c)-(b+c) = (a-c)-(b-c)$.

Die Gleichung 5.) ist nämlich die Haupteigenschaft der Addition und im §. 18. in den Begriff der allgemeinen Summe mit aufgenommen. Die Richtigkeit der übrigen Gleichungen erkennt man aber daran, daß man zu je zweien der Ausdrücke, die einander gleich sein sollen, ein und denselben Ausdruck, gewöhnlich einen der vorkommenden Subtrahenden addirt und sich überzeugt, daß diese Resultate der Addition einander gleich sind; — denn, so wie

$$A+C = B+C$$

gefunden wird, so muß auch (nach §. 17. N. 2.)

$$(A+C)-C = (B+C)-C$$

d. h. (nach §. 20. N. 3.) $A = B$

sein.

Wir wollen dieses Verfahren an einer einzigen dieser Gleichungen näher nachweisen, um zu gleicher Zeit noch zeigen zu können, wie die zu erweisende Gleichung selbst wieder gewonnen wird, wenn man zuletzt denselben Ausdruck wieder (auf beiden Seiten) subtrahirt, den man vorher addirt hat.

Wir nehmen z. B. den ersten und dritten Ausdruck in N. 7. und addiren zu jedem derselben $b-c$, so giebt der erstere derselben zunächst die Summe $[(a-b)+c]+(b-c)$. Hier sind aber jetzt drei Ausdrücke addirt, nämlich $a-b$ und c und $b-c$; addirt man in anderer Ordnung (nach 5.), und zwar c zuerst zu $b-c$, so erhält man (nach 2.) sofort b; und wird dann der dritte Ausdruck $a-b$ noch dazu addirt, so erhält man $(a-b)+b$ d. h. (nach 2.) a. — Man hat also gefunden

$$[(a-b)+c]+(b-c) = a.$$

Subtrahirt man nun hier auf beiden Seiten wiederum den (vorher addirten) Ausdruck $b-c$, so erhält man zur Linken (mit-

telst der 3.) sofort $(a-b)+c$, rechts aber $a-(b-c)$; also daß man hat (nach §. 17. N. 2.)

$$(a-b)+c = a-(b-c);$$

und dies ist der eine Theil der Behauptung in N. 7.

Addirt man aber zu demselben Ausdruck $(a-b)+c$ zur Linken in N. 7. den Subtrahenden b des mittlern Ausdrucks $(a+c)-b$, so erhält man zunächst

$$[(a-b)+c]+b;$$

hier sind aber wieder drei Ausdrücke addirt, nämlich $a-b$ und c und b; addirt man nun dieselben in anderer Ordnung, nämlich b zu $a-b$ (welches a giebt) und dazu noch c, so giebt dies $a+c$ und man findet daher

$$[(a-b)+c]+b = a+c.$$

Subtrahirt man nun hier wieder b auf beiden Seiten, so erhält man zur Linken (nach N. 3.) sofort $(a-b)+c$, zur Rechten aber $(a+c)-b$, und so ist die Formel N. 7. in allen ihren Theilen erwiesen.

Ganz genau so werden auch die übrigen Gleichungen erwiesen.

§. 22.

Es sind also nun alle Formeln, welche in Bezug auf das Rechnen (§. 9.) mit Summen und Differenzen nöthig sind, als allgemeine Gesetze der Addition und Subtraktion strenge erwiesen; und man hat die Ueberzeugung gewonnen, daß alle Gleichungen, welche man mittelst dieser Gesetze, und der Sätze 1. und 2. des §. 17., also unter der Voraussetzung ableitet, als hätte man überall wirkliche Zahlen, auch nothwendig richtige allgemeine Gleichungen sein müssen, deren Resultate mit der wirklichen Zahl nie in Widerspruch gerathen können. — Diese allgemeinen Gleichungen alle drücken aber nichts anderes aus, als das allgemeine Verhalten der beiden Verstandes-Thätigkeiten des Addirens und des Subtrahirens zu einander.

Zum praktischen Rechnen werden wir also von nun an die Formeln NN. 1.—9. der §. 20. und §. 21. ohne alle weitere Rücksicht verwenden.

Sehen wir uns aber nun in dem eroberten Gebiete um, um all' das Einzelne wahrzunehmen, was in demselben sich vorfindet und was nicht abgewiesen werden kann.

§. 23.

Zuerst finden wir die Differenz $p-p$, in welcher Minuend und Subtrahend einander gleich sind. — Wir finden sofort (aus NN. 6. u. 3.)

$$(q-q)+p = (p+q)-q = p;$$

also auch (nach §. 17. N. 2.), wenn man p auf beiden Seiten subtrahirt (nach N. 3.)

$$q-q = p-p;$$

und nachdem man sich überzeugt hat, daß alle solche Differenzen $p-p$, $q-q$, ꝛc. ꝛc. einander gleich sind, d. h. daß man sie alle mit dem Bewußtsein für einander setzen könne, daß man dadurch mit den Gesetzen des Denkens nie in Widerspruch gerathen werde, — braucht man diese Formen $p-p$, $q-q$, ꝛc. nicht mehr von einander zu unterscheiden, und man bezeichnet deshalb jede derselben durch ein und dasselbe Zeichen, nämlich durch 0 und man nennt dieses Zeichen die Null.

Die 0 (Null), welche hier zum ersten Male in die Wissenschaft eingeführt wird, ist also, der so eben gegebenen Definition zufolge, ein stellvertretendes Zeichen, welches die Stelle einer Differenz $a-a$ d. h. die Stelle einer gedachten und eben deshalb wirklichen Subtraktion (zweier gleichen Ausdrücke von einander) vertritt und mit welchem daher nach den Gesetzen der Differenzen „gerechnet" werden kann und muß.

§. 24.

Rechnet man nun etwas weniges mit der 0 (Null) nach den Gesetzen der NN. 1., 6. u. 3., so findet sich sogleich

$$b+0 = 0+b = (q-q)+b = (q+b)-q = (b+q)-q = b,$$

$$b-0 = b-(q-q) = (b-q)+q = b$$ (zuletzt nach N. 2.),

so daß wir als Endresultate dieses Rechnens festhalten

10) $0+b = b+0 = b;$

11) $b-0 = b.$

§. 25.

Ferner kann man Summen und Differenzen von der Form $0+b$ und $0-b$ nicht mehr vermeiden; man pflegt gewöhnlich statt ihrer bloß $+b$ und $-b$ zu schreiben und den Summanden oder Minuenden 0 sich bloß dazu zu denken, und letztere Formen ($+b$ und $-b$) **additive** und **subtraktive Ausdrücke** zu nennen.

Aber eben weil $+b$ und $-b$ nichts anders als Summen und Differenzen (im Sinne der §§. 18. 19.) sind, d. h. **gedachte** und eben deshalb **wirkliche** Additionen und Subtraktionen, so gelten für sie die Gesetze NN. 1.–9. und man kann und muß also nach diesen Gesetzen mit diesen Ausdrücken von der Form $+b$ und $-b$ „rechnen".

Rechnet man nun etwas weniges mit diesen Ausdrücken, so ergiebt sich nicht nur (wegen N. 10.)

12) $+b = b,$

sondern man findet auch sogleich noch als Endresultate

13) $a+(-b) = a-b;$

14) $a-(-b) = a+b.$

Es ist nämlich (nach den NN. 1. und 6. und 10.)

$$a+(-b) = a+(0-b) = (0-b)+a = (0+a)-b = a-b$$

und (mit Zuziehung der N. 11.)

$$a-(-b) = a-(0-b) = (a-0)+b = a+b.$$

Es ist also (nach NN. 13. 14.) einerlei, ob man

$-b \begin{Bmatrix} \text{addirt} \\ \text{subtrahirt} \end{Bmatrix}$, oder b selber $\begin{Bmatrix} \text{subtrahirt} \\ \text{addirt} \end{Bmatrix}$; d. h. man erhält

verschiedene Formen, aber sie sind einander gleich (im Sinne des §. 17.).

Setzt man in NN. 13. 14. 0 statt a, so erhält man dieselben Resultate in folgender Form

15) $+(-b) = -b$;

16) $-(-b) = +b$.

§. 26.

Es versteht sich von selber, daß jeder Ausdruck, der kein einfacher mehr ist, sobald er mit einem zweiten auf's Neue mittelst eines der Operationszeichen in Verbindung gebracht wird, stets als solcher erkennbar sein und bleiben und daher vorher in Klammern eingeschlossen werden muß, damit die Art der Zusammensetzung des Ganzen stets entschieden erkennbar bleibt, weil in den allgemeinen Ausdrücken der Zahlenlehre (Arithmetik, Analysis) die Form derselben zu gleicher Zeit ihr Wesen ist und dieses letztere nur durch die Form ausgedrückt wird. — Will man daher eine dieser Klammern weglassen, so kann dies nur da geschehen, wo entweder der eingeklammerte Ausdruck auch ohne die Klammern stets erkennbar bleibt (wie z. B. in $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot c$ wofür man $\frac{a}{b} \cdot c$ schreibt), oder wo das Weglassen der Klammern zwar eine Zweideutigkeit des Ausdrucks giebt, doch so, daß alle die verschiedenen Auslegungen, deren er fähig ist, zu gleichen Ausdrücken führen (im Sinne des §. 17. d. h. zu solchen, die beliebig für einander gesetzt werden können), wie z. B. in $a+b+c$, worunter man entweder $(a+b)+c$ oder $a+(b+c)$ verstehen kann, während letztere beiden einander gleich sind. — Endlich aber kann man die Klammern auch da weglassen, wo sie auf irgend eine andere Art durch eine gemeinschaftliche Uebereinkunft ersetzt werden.

So z. B. ist man übereingekommen, bei einem durch fortgesetzte Addition und Subtraktion zusammengesetzten Ausdruck z. B.

$$a-b-c+d,$$

wenn die Klammern fehlen, welche die Art seiner Zusammensetzung entschieden feststellen würden, ihn so anzusehen, als wären die addirten und subtrahirten Theile genau in derselben Ordnung mit einander verbunden, wie solche von der Linken zur Rechten bei'm Lesen auf einander folgen. Der obige Ausdruck $a-b-c+d$ z. B. stellt (nach dieser Uebereinkunft) keinen andern vor als diesen, nämlich

$$[(a-b)-c]+d.$$

Will man daher z. B. $c+d$ von $a-b$ subtrahiren, so muß man schreiben $a-b-(c+d)$ und man darf die Klammern um $c+d$ nicht weglassen, wohl aber die um $a-b$.

Ein solcher Ausdruck, wie z. B.

$$a-b-c+d-e-f+g$$

wird gewöhnlich ein (durch Addition und Subtraktion) zusammengesetzter Ausdruck genannt, oder — besser — eine algebraische Summe.

Die addirten und subtrahirten einzelnen Theile a, b, c, d, 2c. heißen die Glieder desselben oder derselben.

§. 27.

Jeden (durch Addition und Subtraktion) zusammengesetzten Ausdruck z. B.

$$a-b-c+d-f$$

kann man als eine durch bloße Addition (ohne Subtraktion) aus den additiven und subtraktiven Ausdrücken $(+a)$, $(-b)$, $(-c)$, $(+d)$, $(-f)$ zusammengesetzte Summe ansehen, während letztere erhalten werden, wenn man den einzelnen Gliedern a, b, c, d, 2c. 2c. ihr Vorzeichen ($+$ oder $-$), welches im gegebenen Ausdruck anzeigt, ob sie addirt oder subtrahirt werden sollen, beläßt, und dabei daran denkt, daß statt a auch $+a$ (§. 25. N. 12.) geschrieben werden kann.

Denn es ist (nach §. 25. N. 13.) einerlei, ob man b, c, f subtrahirt, oder bezüglich (−b), (−c) und (−f) addirt; und eben so ist es einerlei, ob man d addirt, oder +d, weil +d d. h. 0+d = d ist.

Man hat also danach allemal z. B.

17) $a-b-c+d-f = (+a)+(-b)+(-c)+(+d)+(-f)$.

§. 28.

Aus diesem Satze geht eine größere Anzahl von, für das praktische Rechnen (§. 9.) bequemen und wichtigen Regeln hervor, unter denen wir für jetzt herausheben:

1) In jeder algebraischen Summe kann man die Glieder derselben in beliebiger Ordnung schreiben, wenn man nur jedem sein Vorzeichen (+ oder −) beläßt; z. B.

$$a-b-c+d-f = -b-f+a-c+d = -c+a-f+d-b$$
$$= -c-b-f+a+d = \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

2) Eine algebraische Summe wird zu irgend einem Ausdruck addirt, wenn man ihre Glieder mit ihrem Vorzeichen (+ oder −) ohne Weiteres und in beliebiger Ordnung zu dem gedachten Ausdruck hinschreibt, dabei aber immer daran denkt, daß z. B. statt g auch +g geschrieben werden kann, so daß ein Glied ohne Vorzeichen (auch im Anfange) nicht vorzukommen braucht.

Es ist also z. B.

$$(a-b)+(c-d-f+g) = a-b+c-d-f+g,$$
$$(a-b)+(-c-d+f-g) = a-b-c-d+f-g;$$

u. dergl. m.

3) Eine algebraische Summe wird von irgend einem Ausdruck subtrahirt, wenn man ihre Glieder, jedes mit dem entgegengesetzten*) Vorzeichen, übrigens in beliebiger Ordnung, zu dem gedachten Ausdruck (dem Minuenden) hinzuschreibt.

---

*) Da „Addiren" und „Subtrahiren" einander entgegengesetzte Verstandes-Thätigkeiten sind, so ist es nicht unpassend die Zeichen (+) und (−) „entgegengesetzte" zu nennen.

Es ist also z. B.

$$(a-b)-(c-d+f-g) = a-b-c+d-f+g,$$

$$(a-b)-(-c-d+f-g) = a-b+c+d-f+g\ *),$$

u. dergl. m.

Nach §. 21. N. 8. wird nämlich eine Summe subtrahirt, wenn man jeden einzelnen Summanden subtrahirt. Ist nun der zu subtrahirende Summand von der Form $+q$, so kann man q dafür setzen und subtrahiren, also wird man $-q$ erhalten; und ist der zu subtrahirende Summand $-q$, so erhält man offenbar $-(-q)$ d. h. $+q$ (nach §. 25. N. 16.).

Man hat daher auch

$$-(a+b) = -a-b;$$

$$-(a-b) = -a+b = b-a$$

oder

18) $$-a-b = -(a+b);$$

19) $$a-b = -(b-a).$$

Anmerkg. Mit diesen Sätzen ist aber alles erledigt, was in Bezug auf Addition und Subtraktion für das praktische „Rechnen" (§. 9.) nothwendig ist.

§. 29.

In wissenschaftlicher Beziehung ist noch zu bemerken:

1) Jede Differenz $a-b$, deren Minuend und Subtrahend wirkliche (unbenannte, ganze) Zahlen vorstellen, ist entweder selbst einer wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahl gleich, oder sie ist eine solche, die durch 0 (Null) bezeichnet worden ist, oder sie läßt sich auf die Form

$$-(b-a)$$

bringen, in welcher $b-a$ eine wirkliche (ganze, unbenannte)

*) Doch wolle man bemerken, daß die verlangte Subtraktion schon links der (=) Zeichen ausgeführt ist, und daß die Ausdrücke rechts nicht durch Subtrahiren, sondern durch Rechnen, d. h. durch Umformen erhalten worden sind.

Zahl vorstellt, und zwar treten diese drei Fälle in der gedachten Ordnung ein, wenn einmal (im Sinne des §. 2. N. 1.) a größer als b, ein anderes Mal $a=b$ ist, ein drittes Mal aber a kleiner als b. — In diesem letzteren Fall nennt man die Form $-(b-a)$ eine **negative ganze Zahl**, während gleichzeitig die Form $+c$ eine **positive ganze Zahl** genannt wird, so oft c selbst eine wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellt.

2) Jeder aus wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen a, b, c, d, f, g, ꝛc. durch Addition und Subtraktion beliebig zusammengesetzte Ausdruck z. B.

$$a-b-c+d+f-g-h+k$$

ist allemal entweder einer positiven ganzen Zahl, oder der Null, oder einer negativen ganzen Zahl gleich. — Ein vierter Fall ist nicht denkbar.

Denn der Ausdruck kann (nach §. 28.) allemal als eine Differenz zweier ganzen Zahlen geschrieben werden, nämlich

$$a-b-c+d+f-g-h+k=(a+d+f+k)-(b+c+g+h).$$

3) Positive und negative ganze Zahlen, — also Ausdrücke von der Form $+a$ und $-a$, während a eine wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellt, — sind demnach auch nichts anders als die Summen und Differenzen (d. h. die angezeigten Operationen) $0+a$ und $0-a$, und gerade deshalb und nur deshalb kann mit ihnen „gerechnet" werden (§. 9.). — Statt der positiven ganzen Zahl $+a$ kann aber die wirkliche Zahl a gesetzt werden (in der Rechnung oder im Endresultat — nach §. 25. N. 12.).

4) Jede positive ganze Zahl, jede negative ganze Zahl und auch die 0 (Null) ist allemal ausgedrückt durch die Differenz

$$\alpha-\beta$$

zweier wirklichen, aber beliebigen (ganzen, unbenannten) Zahlen.

Soll also in der Folge nachgewiesen werden, daß eine Wahrheit allemal gilt, es mag z. B. q jede beliebige positive oder negative ganze Zahl oder die Null vorstellen, so darf man

nur $\alpha - \beta$ statt q setzen, unter α und β aber beliebige und von einander völlig unabhängige wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen sich denken, und dann nachweisen, daß die gedachte Wahrheit allemal gilt, so oft $q = \alpha - \beta$ gedacht wird.

§. 30.

Am Schlusse dieses Kapitels hat man also neben der wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahl, mit derem Ausdruck operirt werden kann, auch noch die drei speciellen Formen

$$+\alpha, \qquad 0 \quad \text{und} \quad -\alpha,$$

welche nichts anderes als angezeigte, also gedachte, mithin wirkliche Operationen (Verstandes-Thätigkeiten) sind, und welche, so oft α eine wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellt, den Namen bezüglich der positiven ganzen Zahl, der Null und der negativen ganzen Zahl tragen, ohne wirkliche Zahlen zu sein, obgleich statt $+\alpha$ auch bloß die wirkliche Zahl α gesetzt werden kann, und es also nur ein theoretischer Fehler ist, aber kein praktischer, wenn man sich erlaubt, schon $+\alpha$ eine wirkliche Zahl zu nennen. Es ist nämlich $+\alpha$ eine bloße Rechnungsform, nämlich die Summe (d. h. die gedachte, also die vorhandene Verstandes-Thätigkeit der Addition) $0+\alpha$, während 0 wiederum nur die gedachte, also die vorhandene Verstandes-Thätigkeit der Subtraktion, nämlich $p-p$ oder $b-b$, oder 2c. anzeigt.

Zweites Kapitel.

Von den Zahlen-Verbindungen der zweiten Art, d. h. vom Multipliciren und Dividiren. — Von den gebrochenen und von den reellen Zahlen. — Vom (analytisch) Größeren und Kleineren.

Vorerinnerung.

Das Produkt $a \cdot b$ oder ab oder $a \times b$ des §. 7. hat als wesentliche Merkmale: erstens von dieser bestimmten Form zu sein, dann daß man ab mit ba und $(ab)c$ mit $(ac)b$ und mit $a(bc)$, ferner auch $(a \pm b)c$ mit $ac \pm bc$ *) vertauschen kann, ohne daß man dadurch je mit den Denkgesetzen in Widerspruch gerathen könnte; — endlich aber, daß es eine von a und b auf eine bestimmte Weise abhängige wirkliche (ganze, unbenannte) Zahl vorstellt, nämlich die Summe $a+a+a+a+ \cdots$ von b Summanden.

Läßt man nun dieses letztere Merkmal fallen (wie im §. 18.) und faßt man wieder alle übrigen Merkmale in einen neuen Begriff zusammen, so hat man das allgemeinste Produkt, und somit auch das allgemeinste Multipliciren, sobald man (nach §. 16.) unter dem letzteren Wort das Hinschreiben dieses Produkts versteht.

Allein es fragt sich vor allen Dingen, ob nicht die 4 Merkmale, welche wir jetzt zum Begriff des allgemeinen Produkts zusammenfassen wollen, und die sich mit einander vertragen, so oft man es mit wirklichen ganzen Zahlen zu thun hat, nicht vielleicht unverträglich mit einander sind, wenn jetzt (neben der positiven ganzen Zahl) auch die negative ganze Zahl und die Null in Betrachtung gezogen wird, d. h. wenn jetzt diejenigen speciellen Zahlen-

---

*) Man müßte hier eigentlich schreiben $(ac)+(bc)$, weil unter $ac+bc$ auch $a(c+b)c$ verstanden werden kann. Die Analysten sind aber stillschweigend übereingekommen, in Fällen, wo die Folge der Operationen nicht genau bemerkbar ist, immer den späteren Operationen das Vorrecht einzuräumen, während in $a(c+b)c$ zuerst addirt und dann erst multiplicirt sein würde, — dieser Uebereinkunft entgegen.

Erscheinungen beachtet werden, die mit den erweiterten Begriffen der Summe und der Differenz in die Untersuchungen mit Nothwendigkeit eingegangen sind.

Deshalb ist es nothwendig, erst einmal einen Begriff des Produkts ab festzustellen für den Fall, daß a und b beliebige Differenzen wirklicher (ganzer) Zahlen vorstellen, d. h. positive (also auch wirkliche) ganze Zahlen oder Null oder negative ganze Zahlen; — dann aber zu untersuchen, ob für diesen (noch aufzustellenden allgemeineren) Begriff des Produkts noch immer

$$ab = ba$$

$$(ab)c = (ac)b = a(bc)$$

und $$(a \pm b)c = ac \pm bc$$

sein müsse. — Ist dies untersucht und finden sich diese vier Gleichungen bestätigt, dann erst kann man den vorhin erwähnten allgemeinsten Begriff des Produkts aufstellen, ohne fürchten zu müssen ein hölzernes Eisen definirt, d. h. in die Definition eine contradictio in adjecto, nämlich Merkmale aufgenommen zu haben, welche mit einander unverträglich sind.

§. 31.

Zuerst verstehen wir unter dem ganzen Produkt μa, wo a bereits ganz allgemein gedacht ist, während μ eine wirkliche (ganze) Zahl vorstellt, allemal die allgemeine Summe

$$a + a + a + a + \cdots$$

von μ gleichen Summanden.

Für solche ganze Produkte gelten die Formeln

I. $$\mu(a \pm b) = \mu a \pm \mu b,$$

II. $$(\mu + \nu)a = \mu a + \nu a,$$

III. $$(\mu - \nu)a = \mu a - \nu a;$$

wie ohne Weiteres in die Augen fällt, wenn nur μ und ν und auch $\mu - \nu$ wirkliche (positive, ganze) Zahlen vorstellen.

Man braucht nämlich nur statt der ganzen Produkte links und rechts der Gleichheitszeichen, die allgemeinen Summen zu setzen, welche sie, der oben gegebenen Definition zufolge, vorstellen, um sogleich zu sehen, daß links und rechts die nun bloß durch Addition und Subtraktion zusammengesetzten Ausdrücke einander gleich sind.

§. 32.

Dieser letztern Gleichung III. bedient man sich nun, um die Bedeutung des Zeichens ba für den Fall festzustellen, in welchem $b = \mu - \nu$ ist, μ und ν aber beliebige wirkliche (positive, ganze) Zahlen vorstellen, so daß $\mu - \nu$ selbst eine wirkliche (positive, ganze) Zahl vorstellen kann, oder 1, oder 0, oder auch eine negative ganze Zahl.

Man setzt also fest, man wolle unter ba, wenn b eine solche beliebige Differenz zweier ganzen Zahlen μ und ν vorstellt, allemal verstehen die Differenz $\mu a - \nu a$, wo μa und νa ganze Produkte sind und (nach §. 31.) allgemeine Summen vorstellen. Man hat also danach, so oft $b = \mu - \nu$ gedacht wird

$$ba \quad \text{d. h.} \quad (\mu - \nu)a = \mu a - \nu a,$$

auch wenn $\mu - \nu$ entweder 1, oder 0, oder eine negative ganze Zahl vorstellen sollte*).

Ein solches Zeichen ba, in welchem b die Differenz zweier ganzen Zahlen $(\mu - \nu)$ vorstellt, und daher entweder positiv (ganz), oder 1, oder 0, oder negativ (ganz) ist, und welches die Differenz zweier allgemeinen Summen $\mu a - \nu a$ vorstellen soll, — nennen wir ein Differenz-Produkt; es enthält das ganze Produkt (des §. 31.) als einen besonderen Fall in sich, wenn nämlich $\mu - \nu$ positiv (ganz) und größer als 1 ist.

Anmerkg. Nach dieser Definition stellt also das Differenz-Produkt $(-\beta)a$, wo $-\beta$ negativ (ganz) ist, — eben weil dann $-\beta$ der Differenz $\mu - (\mu + \beta)$ zweier wirklichen

---

*) Ist $b = \mu - \nu$, so ist auch $b = (\mu + \delta) - (\nu + \delta)$, und in so ferne würde nach der eben gegebenen Definition, ein und dasselbe Zeichen ba, einmal die Differenz $\mu a - \nu a$, das anderemal die Differenz $(\mu + \delta)a - (\nu + \delta)a$ bedeuten. Weil aber (nach II.) $(\mu + \delta)a = \mu a + \delta a$ und $(\nu + \delta)a = \nu a + \delta a$ ist, so lange nur δ ebenfalls eine wirkliche (positive, ganze) Zahl bedeutet, so sind diese zwei Bedeutungen einander gleich, also nur in der Form, nicht aber im Wesen von einander verschieden.

(ganzen) Zahlen gleich ist, — die Differenz $\mu a-(\mu+\beta)a$, also (nach II.) die Differenz $\mu a-(\mu a+\beta a)$ d. h. die Differenz $-\beta a$ (nämlich $0-\beta a$) vor.

Eben so stellt (nach dieser Definition) das Differenz-Produkt $0 \cdot a$ d. h. $(\mu-\mu)a$ die Differenz $\mu a-\mu a$ d. h. 0 (Null) selbst vor.

Sind ferner a, b und c beliebige Differenzen ganzer Zahlen, z. B. bezüglich $\alpha-\beta$, $\gamma-\delta$ und $\mu-\nu$, so ist allemal

I. $ab = ba,$

II. $(ab)c = (ac)b = a(bc)$

und

III. $(a\pm b)c = ac\pm bc.$

Denn es stellt (nach der Definition) ab d. h. $(\alpha-\beta)b$ die Differenz $\alpha b-\beta b$, also die Differenz $\alpha(\gamma-\delta)-\beta(\gamma-\delta)$ d. h. (nach §. 31. I.) die Differenz $(\alpha\gamma-\alpha\delta)-(\beta\gamma-\beta\delta)$ vor, so daß man hat

1) $ab = \alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma+\beta\delta.$

Auf der andern Seite stellt aber ba die Differenz $\gamma a-\delta a$, also die Differenz $\gamma(\alpha-\beta)-\delta(\alpha-\beta)$, mithin die Differenz $\gamma\alpha-\gamma\beta-(\delta\alpha-\delta\beta)$ vor, so daß man hat

2) $ba = \gamma\alpha-\gamma\beta-\delta\alpha+\delta\beta.$

Da nun die griechischen Buchstaben wirkliche (ganze) Zahlen bedeuten und für diese (nach §. 4.) der hier zu erweisende Satz schon gilt, so folgt, daß die Bedeutungen von ab und von ba in 1.) und 2.) einander gleich sind. — Q. E. D.

Ferner ist nach unserer Definition

$$ba = \gamma a-\delta a$$

und

$$\begin{aligned} c(ba) &= \mu(ba)-\nu(ba) \\ &= \mu(\gamma a-\delta a)-\nu(\gamma a-\delta a), \text{ also (nach §. 31. I.)} \\ &= \mu(\gamma a)-\mu(\delta a)-\nu(\gamma a)+\nu(\delta a) \\ &= (\mu\gamma)a-(\mu\delta)a-(\nu\gamma)a+(\nu\delta)a \text{ *)}. \end{aligned}$$

---

*) Es ist nämlich (nach §. 31.)

$$\mu(\gamma a) = \gamma a+\gamma a+\gamma a+\gamma a+\cdots$$

diese Summe von μ Summanden aber nach §. 31. II. wiederum

Auf der andern Seite wird aber (auch nach unserer Definition)

$$\begin{aligned} b(ca) &= \gamma(ca)-\delta(ca) \\ &= \gamma(\mu a-\nu a)-\delta(\mu a-\nu a) \\ &= \gamma(\mu a)-\gamma(\nu a)-\delta(\mu a)+\delta(\nu a) \\ &= (\gamma\mu)a-(\gamma\nu)a-(\delta\mu)a+(\delta\nu)a. \end{aligned}$$

Also ist $c(ba) = b(ca)$ und daher auch (nach I.) $(ab)c = (ac)b$. — Q.E.D.

Was nun die dritte und vierte Behauptung betrifft, nach welcher $(a\pm b)c = ac\pm bc$ sein soll, so wird sie wie folgt erwiesen. — Es ist nach der Definition des Differenz-Produkts

$$c(a\pm b) = \mu(a\pm b)-\nu(a\pm b),$$

also auch (nach §. 31. I.) $= \mu a\pm\mu b-(\nu a\pm\nu b)$,

während wiederum nach derselben Definition

$$ca = \mu a-\nu a \quad \text{und} \quad cb = \mu b-\nu b$$

ist, also

$$ca\pm cb = (\mu a-\nu a)\pm(\mu b-\nu b)$$

wird, d. h. ein Ausdruck wird, welcher, wie man sieht, dem durch $c(a\pm b)$ vorgestellten gleich ist. Es ist also $ca\pm cb = c(a\pm b)$ und daher (nach I.) auch $(a\pm b)c = ac\pm bc$, wenn nur a, b und c beliebige Differenzen ganzer Zahlen, d. h. beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder die Null vorstellen.

§. 33.

Vereinigt man daher die Merkmale: erstens diese Form ab oder a•b oder a×b, ferner die Eigenschaften, welche die Gleichungen I.—III. des §. 32. aussprechen, nämlich daß in der Rechnung

ab mit ba

und (ab)c mit (ac)b und mit a(bc)

endlich (a±b)c mit ac±bc

vertauscht werden können, (nach dem Muster des §. 18. und nach der Andeutung in der Vorerinnerung zu gegenwärtigem Kapitel) in einen Begriff zusammen, so hat man das allge-

---

$= (\gamma+\gamma+\gamma+\gamma+\cdots)a$, d. h. $= (\mu\gamma)a$ —

Eben so die übrigen.

meine Produkt, dessen Theile noch immer die Faktoren, oder Multiplikator und Multiplikand heißen mögen.

Und wenn man unter „multipliciren" (a mit b) das Bilden (im Verstande) und das dem entsprechende Hinschreiben dieses (allgemeinsten) Produkts ab versteht, so hat man dadurch auch den allgemeinsten Begriff des Multiplicirens.

Und da die hier zusammengefaßten Merkmale des Produkts nichts anders enthalten, als was die Gleichungen I.—III. des §. 32. aussagen, so braucht man nicht zu fürchten, daß man sich einander widersprechende Merkmale in den Begriff aufgenommen habe, eben weil man nur mit den Differenzen ganzer Zahlen, d. h. mit der positiven oder negativen ganzen Zahl oder mit der Null in Widerspruch gerathen könnte.

Endlich stecken in diesem allgemeinen Produkt das frühere ganze und auch das vorhergehende Differenz-Produkt als besondere Fälle.

§. 34.

Ganz analog wie im §. 19. stellen wir nun den Begriff des allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$ oder $a:b$ so auf, daß wir darunter diese Form verstehen, welche die Eigenschaft hat, mit b multiplicirt a zu geben, d. h. ein Produkt $\frac{a}{b}\cdot b$ zu geben, welches $= a$ ist. Der allgemeine Quotient $\frac{a}{b}$ oder $a:b$, in welchem a noch immer der Dividend, b aber der Divisor heißen mag, — stellt also auch jeden Ausdruck vor, welcher die eben gedachte Eigenschaft hat, nämlich mit b multiplicirt, ein Produkt zu geben, welches dem a gleich ist.

Unter „Dividiren a durch b" verstehen wir noch immer das Bilden dieses Quotienten $\frac{a}{b}$ (im Verstande) und das dem entsprechende Hinschreiben desselben (vergl. §. 16.).

§. 35.

Als wir im §. 19. auf ganz analoge Weise wie im vorstehenden §. 34. die Differenz $a-b$ als eine selbstständige Form definirten, welche die Eigenschaft hat (also jeden Ausdruck vorstellt, der diese Eigenschaft hat), nämlich zu b addirt, a zu geben, — da hätten wir uns fragen müssen, ob zwei Ausdrücke x und z, welche diese Eigenschaft mit einander gemein haben, so nämlich, daß $b+x=a$ und auch $b+z=a$ wird, einander nicht gleich zu sein brauchen, oder ob sie einander gleich sein müssen. Weil wir aber dazumal nur mit der wirklichen Zahl in Widerspruch gerathen konnten und für wirkliche Zahlen aus $b+x=b+z$ nothwendig $x=z$ folgt (weil $b+x$ um eben so viele Einheiten größer oder kleiner als $b+z$ sein muß, als x größer oder kleiner als z gedacht wird), so verstand sich die Eindeutigkeit der Differenz $a-b$ so von selbst, daß wir auf jede weitere Untersuchung verzichten konnten.

Ganz anders ist es aber hier bei der Einführung des allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$, weil wir hier nicht bloß die wirklichen Zahlen, sondern auch die Differenzen zweier (ganzen) Zahlen, d. h. die positive und die negative ganze Zahl und die Null zu berücksichtigen haben. — Findet sich also

$$bx = a \quad \text{und auch noch} \quad bz = a$$

so entsteht ernstlichst die Frage, ob auch aus

$$bx = bz$$

nothwendig folgere

$$x = z.$$

Diese Frage muß nun zunächst beantwortet werden. Es folgt aber aus $bx = bz$ zunächst $bx-bz=0$; also, wenn b eine Differenz ganzer Zahlen ist, (nach §. 32.) auch noch

$$b(x-z) = 0,$$

und hieraus folgt

$$x-z=0 \quad \text{oder} \quad x=z$$

nur dann nothwendig, wenn b nicht Null ist.

Ist aber $b=0$, so ist (nach §. 32.) $bx=0$ und $bz=0$, wie auch x und z gedacht werden mögen; also ist dann $bx=bz$, ohne daß deshalb $x=z$ zu sein braucht. Der Quotient $\frac{a}{0}$ hat also gar keinen Werth, d. h. es giebt gar keinen Ausdruck, welcher mit 0 multiplicirt (§. 32.) a geben könnte, so oft a nicht Null ist; wenn aber a ebenfalls der Null gleich ist, so hat der Quotient $\frac{a}{0}$ d. h. $\frac{0}{0}$ unendlich viele Werthe, d. h. jeder beliebige Ausdruck hat die durch die Form $\frac{0}{0}$ ausgedrückte Eigenschaft, nämlich mit Null multiplicirt, Null zu geben.

Und nur wenn der Divisor b nicht Null ist, hat der Quotient $\frac{a}{b}$ jedesmal nur einen einzigen Werth, d. h. alle Ausdrücke, welche die unter $\frac{a}{b}$ vorgestellte Eigenschaft (nämlich mit b multiplicirt, a zu geben) mit einander gemein haben, sind nothwendig einander gleich (im Sinne des §. 17.).

Der Quotient $\frac{a}{b}$ ist also jedesmal eindeutig, so lange der Divisor b nicht Null ist. Ist aber der Divisor b, $=0$, so ist der Quotient $\frac{a}{b}$ unendlich vieldeutig, wenn nämlich auch $a=0$ ist, — oder es giebt gar keinen Ausdruck, der die durch den Quotienten $\frac{a}{b}$ ausgedrückte Eigenschaft hat, wenn nämlich a nicht Null ist.

§. 36.

Damit nun in der Folge der Quotient $\frac{a}{b}$ stets nur als

eindeutig angesehen werden könne, d. h. damit man in der Folge, wenn x und z die durch den Quotienten $\frac{a}{b}$ vorgestellte Eigenschaft haben, nämlich mit b multiplicirt, a zu geben, — mit Sicherheit und Nothwendigkeit behaupten könne, daß dann auch $x = z$ sein müsse, — so setzen wir hiermit fest

daß wir bei jedem Quotienten, der von nun an erscheint, stets stillschweigend voraussetzen, daß sein Divisor nicht Null ist.

Daraus aber folgt von selbst,

daß jede allgemeine Rechnung in dem besonderen Falle nicht zu gelten braucht, wo einer der in der Rechnung vorkommenden Divisoren der Null gleich wird. — Für solchen besonderen Fall muß jedesmal von vorn herein, oder wenigstens von da ab, wo der Divisor, welcher jetzt $= 0$ geworden ist, zum ersten Male erscheinen würde, eine besondere Rechnung angelegt werden *).

---

*) Sucht man z. B. den unbekannten und deshalb einstweilen durch x bezeichneten, von a und b abhängigen Ausdruck, welcher die Gleichung

$$ax = b$$

als eine richtige erscheinen läßt, so dividirt man zu dem Ende beide Seiten durch a, um aus der erhaltenen Gleichung

$$x = \frac{b}{a}$$

abnehmen zu können, daß $\frac{b}{a}$ dieser unbekannte und einstweilen durch x bezeichnete Ausdruck ist. Dies gilt aber (nach dem Obigen) nur, so lange a nicht Null ist. — So wie $a = 0$ wird, so ist die Frage: welchen Ausdruck muß man unter x sich denken, damit ax, d. h. jetzt $0 \cdot x, = b$ wird, dahin zu beantworten, daß $0 \cdot x$ immer der Null gleich wird, was man auch statt x setzen möge, und daß also die Gleichung $ax = b$ mit $a = 0$ selbst in $0 = b$ übergehe und entweder richtig ist für jeden Werth von x (wenn b selbst $= 0$ ist), oder einen Widerspruch enthält (wenn b nicht Null sein sollte).

§. 37.

Aus diesen Begriffen und Sätzen geht aber auch noch weiter hervor:

I. für zwei Elemente a und b,

20) $ab = ba;$

21) $\frac{a}{b} \cdot b = a;$

22) $\frac{ab}{b} = a;$

23) $a : \frac{a}{b} = b;$

II. für drei Elemente a, b, c:

24) $(ab)c = (ac)b = a(bc),$

25) $\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c};$

26) $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} = a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b};$

27) $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b} = \frac{a}{bc};$

28) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} = \frac{a:c}{b:c};$

29) $(a+b)c = ac+bc;$

30) $(a-b)c = ac-bc;$

31) $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c};$

32) $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c};$

33) $a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c};$

34) $a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c};$

35) $$\frac{A}{B} = z + \frac{A-Bz}{B}.$$

Die Nummern 20. 24. 29. u. 30. liegen unmittelbar im Begriff des allgemeinen Produkts (§. 33.). — Die Formeln 21.—23. liegen unmittelbar im Begriff des allgemeinen Quotienten (§. 34.). — Den Beweis der übrigen Formeln führt man ganz analog nach dem im §. 21. beschriebenen Verfahren.

Man multiplicirt nämlich zwei der Ausdrücke, welche einander gleich sein sollen, mit einem und demselben dritten Ausdruck (gewöhnlich mit einem der vorkommenden Divisoren) und überzeugt sich mittelst Anwendung der vorher schon erwiesenen Gleichungen, daß man auf beiden Seiten ein und dasselbe Resultat erhalte; dann folgt die Richtigkeit der zu erweisenden Gleichung aus der Untersuchung des §. 35. — Geht man nachgehends den Weg rückwärts, so stellt sich die zu erweisende Gleichung allemal als etwas gefundenes elegant her.

Wollte man z. B. die Richtigkeit der Gleichung 35.) erweisen, so würde man links und rechts mit B multipliciren; man erhält dann zur Linken ohne Weiteres A, zur Rechten aber zunächst

$$\left(z + \frac{A-Bz}{B}\right) \cdot B,$$

hierauf (nach N. 29.)

$$Bz + \frac{A-Bz}{B} \cdot B, \quad \text{dann} \quad Bz + (A-Bz) \quad \text{(nach N. 21.)}$$

und zuletzt ebenfalls A (nach §. 20. N. 2.). — Geht man nun von der eben gefundenen Gleichung

$$\left(z + \frac{A-Bz}{B}\right) \cdot B = A$$

aus und dividirt man auf beiden Seiten durch B, so erhält man sogleich die zu erweisende Gleichung, sobald man zur Linken die N. 22. anwendet.

§. 38.

Dadurch sind aber nun alle Gesetze der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, welche in den §§. 10.—14. als zum „Rechnen" nothwendig und ausreichend hingestellt worden sind (dort unter der Voraussetzung, daß man überall wirkliche Zahlen habe) jetzt als ganz allgemeine Gesetze der Verstandes-Thätigkeiten festgestellt, so daß man sich bei ihrer Anwendung zum „Rechnen" nie um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben

oder sonstigen Elemente der Rechnung zu bekümmern braucht, wenn man nur voraussetzt, daß keiner der vorkommenden Divisoren Null ist.

Alle Gleichungen von N. 1. an bis zu N. 35. drücken nichts anders aus als: wie sich die vier Verstandes-Thätigkeiten (Operationen) des Addirens, Subtrahirens, Multiplicirens und Dividirens zu einander verhalten, und dasselbe drücken natürlich auch diejenigen Gleichungen aus, welche nun aus den eben gedachten mit Zuziehung des §. 17. (NN. 1. u. 2.) erhalten werden.

Und in allen Gleichungen sind die Buchstaben als die bloßen Träger der Operationszeichen anzusehen, um deren specielle Bedeutung man sich nicht zu bekümmern braucht.

Aus diesen Gleichungen lassen sich aber leicht zusammengesetztere bilden, darunter auch solche, welche noch einfach genug sind, um auch als Formeln dienen zu können.

So z. B. findet man sogleich noch

36) $$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

37) $$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Denn es ist (nach N. 26.)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{c}{d}}{b} = \frac{\left(\frac{ac}{d}\right)}{b}$$

und letzterer Ausdruck ist (nach N. 27.) wiederum $= \frac{ac}{bd}$. (Vgl. §. 16.).

§. 39.

Sehen wir nun wiederum zu, was wir alles in dem erworbenen Gebiete vorfinden.

Erstlich ist

38) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$; und 39) $\frac{0}{a} = 0$;

denn es ist (nach §. 23.)

$$0 \cdot a = (p-p)a = pa - pa = 0$$

und $$\frac{0}{a} = \frac{p-p}{a} = \frac{p}{a} - \frac{p}{a} = 0.$$

Ferner ist

40) $$(-a)(+b) = (+b)(-a) = -ba;$$

41) $$(-a)(-b) = +ab;$$

42) $$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b} = \frac{+a}{-b};$$

43) $$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b};$$

und wir fassen diese vier letztern Resultate in der praktischen Regel zusammen: „Gleiche Vorzeichen mit einander multiplicirt oder „durch einander dividirt geben **plus** (+), verschiedene Vorzeichen aber **minus** (−).“

Es ist nämlich (nach §. 25. und nach N. 30. und N. 38.)

$$(-a)b = (0-a)b = 0 \cdot b - ab = 0 - ab = -ab;$$

ferner, wenn man hier $-b$ statt b setzt,

$$(-a)(-b) = -a(-b) = -(-ab) = +ab.$$

Die Formeln NN. 42. und 43. endlich erweisen sich dadurch, daß man links und rechts mit $-b$ oder mit $+b$ multiplicirt und sich vermöge der voranstehenden Formeln überzeugt, daß auf beiden Seiten ein und dasselbe herauskommt. So ist z. B. (nach N. 41.)

$$\left(-\frac{a}{b}\right)\left(-b\right) = +\frac{a}{b} \cdot b = +a;$$

also, wenn man auf beiden Seiten durch $-b$ dividirt

$$-\frac{a}{b} = \frac{+a}{-b}.$$

§. 40.

Ferner hat man, ohne daß der Buchstabe a irgend eine bestimmte Bedeutung zu haben braucht,

44) $$1 \cdot a = a \cdot 1 = a,$$

45) $$\frac{a}{a} = 1$$ und 46) $$\frac{a}{1} = a.$$

Denn es ist (nach §. 32.)

$$1 \cdot a = (3-2) \cdot a = 3a-2a = (a+a+a)-(a+a) = a,$$

während (nach N. 20.) wiederum $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ ist. — U. s. w.

§. 41.

Für das praktische Rechnen ist noch Folgendes zu merken:

1) Es ist einerlei, ob man zwei Summen z. B. $a+b+c$ und $f+g$ mit einander multiplicirt, oder ob man lieber jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der andern Summe multiplicirt und zuletzt alle einzelnen Produkte addirt; d. h. es ist

$$(a+b+c)(f+g) = af+bf+cf+ag+bg+cg.$$

Es folgt dies unmittelbar aus einer wiederholten Anwendung der Formel (N. 29.)

$$(a+b)c = ac+bc.$$

2) Daher ist es auch einerlei, ob man zwei algebraische Summen (sogenannte zusammengesetzte Ausdrücke) z. B. $a-b-c+d$ und $-f+g$ mit einander multiplicirt, oder ob man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multiplicirt, den einzelnen Produkten das (+) oder (−) Zeichen vorsetzt, je nachdem die beiden Faktoren einerlei oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, zuletzt aber die so erhaltenen Glieder zur algebraischen Summe verbindet; d. h. es ist

$$(a-b-c+d)(-f+g) = -af+bf+cf-df+ag-bg-cg+dg.$$

Denn es folgt dies aus vorstehender N. 1. in Verbindung mit §. 27. und §. 39. NN. 40. 41. unmittelbar.

3) Zwei algebraische Summen z. B. $-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn$ und $-m+n$ sind (nach §. 34.) durch einander dividirt, die erstere durch die letztere, sobald man den Quotienten

$$\frac{-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn}{-m+n}$$

gedacht und hingeschrieben hat. — Soll aber dieses Resultat der Division abermals in eine algebraische Summe umgeformt werden, so geht dies nur mit Hilfe der Formel N. 35. des §. 37., welche Formel man wiederholt in Anwendung bringen muß, um den letztern Summanden, der immer wieder ein Quotient ist, immer wieder auf's Neue in eine Summe von zwei Summanden umzuformen, bis man entweder zuletzt einen zweiten Summanden erhält, der kein Quotient (d. h. keine angezeigte Division) mehr ist, oder bis man überhaupt seine Zwecke erreicht hat.

Weil jedoch nach der anzuwendenden Formel N. 35. des §. 37. der erste Summand z immer ganz willkührlich angenommen werden kann, so wird man auf diesem Wege unendlich viele verschiedene Formen algebraischer Summen erhalten können, die alle dem vorgedachten Quotienten und daher auch alle einander gleich sind. Man erhält aber in der Regel das einfachste Resultat, wenn man zum ersten Summanden (z) jedesmal das nimmt, was man erhält, wenn man ein Glied des Dividenden durch ein schickliches Glied des Divisors dividirt.

Beispiel 1. So findet sich nach diesem Lehrsatze:

$$\frac{-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn}{-m+n}$$

$$= -c + \frac{-am+bm-dm+an-bn+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+\frac{bm-dm-bn+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+(-b)+\frac{-dm+dn}{-m+n}$$

$$= -c+a+(-b)+d+0$$

$$= -c+a-b+d = a-b-c+d.$$

Und im Praktischen nimmt sich die Arbeit so aus:

Divisor	Dividend	Quotient
$-m+n$	$-am+bm+cm-dm+an-bn-cn+dn$	a
	$-am+an$	
	$bm+cm-dm-bn-cn+dn$	$-b$
	$bm-bn$	
	$cm-dm-cn+dn$	$-c$
	$cm-cn$	
	$-dm+dn$	$+d$
	$-dm+dn$	
	0	

Beispiel 2.

$$\frac{a+bx+cx^2}{1+x}=a+\frac{(b-a)x+cx^2}{1+x}$$

$$=a+(b-a)x+\frac{(a-b+c)x^2}{1+x}$$

$$=a+(b-a)x+(a-b+c)x^2+\frac{-(a-b+c)x^3}{1+x}$$

$$=a+(b-a)x+(a-b+c)x^2-(a-b+c)x^3+\frac{(a-b+c)x^4}{1+x}$$

$$=\frac{cx^2+bx+a}{x+1}=cx+\frac{(b-c)x+a}{x+1}$$

$$=cx+(b-c)+\frac{a-b+c}{x+1}=$$

u. s. w. f.,

so daß wir hier 6 algebraische Summen haben, die alle einander gleich sind, weil sie alle dem gegebenen Quotienten gleich sind. Und diese Umformung läßt sich beliebig fortsetzen.

§. 42.

Für die Theorie dagegen sind folgende Betrachtungen wichtig.

1) Jeder durch Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zusammengesetzte Ausdruck, wie verwickelt er auch immer gegeben sein mag, läßt sich mittelst der Formeln N. 1.—46. der §§. 19.—40. allemal entweder in eine algebraische Summe

umformen, deren Glieder keine Division enthalten, oder in einen Quotienten zweier solchen algebraischen Summen.

2) Jeder aus ursprünglich wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen mittelst derselben vier erstern Operationen, wenn auch noch so zusammengesetzte Ausdruck, läßt sich daher immer entweder in eine Differenz ganzer Zahlen, oder in einen Quotienten zweier Differenzen ganzer Zahlen umformen, d. h. entweder in eine positive oder negative ganze Zahl oder in die Null, oder in einen Quotienten von der Form

$$\frac{+\alpha}{+\beta}, \quad \frac{+\alpha}{-\beta}, \quad \frac{-\alpha}{+\beta}, \quad \frac{-\alpha}{-\beta},$$

also in Ausdrücke von der Form

$$+\alpha, \quad 0, \quad -\alpha, \quad +\frac{\alpha}{\beta} \quad \text{und} \quad -\frac{\alpha}{\beta},$$

wo α und β wirkliche (ganze) Zahlen sind, während der Quotient $\frac{\alpha}{\beta}$ selbst nicht mehr einer wirklichen (ganzen) Zahl gleich ist.

§. 43.

Ein solcher Quotient (angezeigte Division) $\frac{\alpha}{\beta}$ zweier wirklichen (ganzen) Zahlen, der aber nicht selber einer wirklichen (ganzen) Zahl gleich ist, wird ein Bruch oder eine gebrochene Zahl genannt, und die Formen $+\frac{\alpha}{\beta}$, $-\frac{\alpha}{\beta}$ heißen dann positive gebrochene und negative gebrochene Zahlen.

Der Dividend und der Divisor einer gebrochenen Zahl wird auch ihr Zähler und ihr Nenner genannt. — Dieser gebrochenen Zahl gegenüber wird die wirkliche Zahl eine ganze genannt.

Der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ heißt ferner ein echter oder eigentlicher, wenn α kleiner als β (im Sinne des §. 2. N. 2.), dagegen ein unechter oder uneigentlicher, wenn α größer als β ist.

Die ganzen und die gebrochenen Zahlen schlechtweg (welche also weder positive noch negative sind) nennen wir hier sehr häufig absolute Zahlen.

Anmerkg. Die gebrochene Zahl oder der Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ ist also nichts anders als eine angezeigte Division, welcher die gedachte und somit die wirkliche Division, d. h. das wirkliche Verstandes-Geschäft zu Grunde liegt. — Eben so sind die positiven und negativen gebrochenen Zahlen $+\frac{\alpha}{\beta}$ und $-\frac{\alpha}{\beta}$ nichts anders als angezeigte Additionen und Subtraktionen einer gebrochenen Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ zu und von der Null. — Aber eben weil das „Rechnen" (nach §. 9.) nichts anders als ein Umformen gedachter oder gegebener Formen (angezeigter Operationen) ist, so kann mit der gebrochenen Zahl, und eben so mit der positiven gebrochenen und negativen gebrochenen Zahl nach denselben Gesetzen NN. 1.–46. der §§. 20.–40. „gerechnet" werden*).

Die Formeln NN. 21.–35. des §. 37. lehren also auch, wie mit Brüchen „gerechnet" wird.

1) Namentlich lehrt die N. 28.):

Ein Bruch bleibt sich gleich, wenn man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

2) Die Nummern 26. und 27. lehren:

Ein Bruch $\frac{a}{b}$ wird mit einer ganzen Zahl c $\begin{Bmatrix}\text{multiplicirt}\\ \text{dividirt}\end{Bmatrix}$, wenn man den Zähler a allein mit der ganzen Zahl c

*) In den Anwendungen zur Vergleichung der Größen wird übrigens die gebrochene benannte Zahl (mit benannten Zahlen wird aber nie „gerechnet") als ein Theil des Ganzen (der Benennung) erscheinen, und zwar gerade weil $\frac{\alpha}{\beta}$ nur die Eigenschaft repräsentirt, mit β multiplicirt, α zu geben.

$\left\{\begin{matrix}\text{multiplicirt}\\ \text{dividirt}\end{matrix}\right\}$, oder umgekehrt den Nenner b allein mit der ganzen Zahl c $\left\{\begin{matrix}\text{dividirt}\\ \text{multiplicirt}\end{matrix}\right\}$.

3) Die Nummern 31. und 32. lehren:

Zwei Brüche $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$, die einerlei Nenner haben, werden $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right\}$ einander $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, wenn man ihre Zähler a und b allein $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right\}$ einander $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, den gemeinschaftlichen Nenner c aber beibehält.

4) Die Nummern 33. und 34. endlich lehren:

Ein Bruch $\frac{b}{c}$ wird $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\ \text{von}\end{matrix}\right\}$ einer ganzen Zahl a $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, wenn man a „unter den Bruch bringt", d. h. wenn man $\frac{ac}{c}$ statt a setzt (nach N. 22.) und dann $\frac{ac}{c}$ und $\frac{b}{c}$ nach den vorangehenden Nummern 33. u. 34. addirt oder subtrahirt*).

Eine eigene „Lehre der Brüche" ist daher gar nicht denkbar; im Gegentheil gelten ja dieselben Formeln, von denen die Art ihres Gebrauchs für das Rechnen mit Brüchen wir so eben in Worten ausgesprochen haben, — viel allgemeiner für alle Quotienten, deren Dividend und Divisor ganz beliebige, noch allgemeine oder bereits völlig bestimmte Ausdrücke sein können; und es läßt sich natürlich die Art des Gebrauchs derselben Formeln

---

*) Man vergesse aber nie, daß z. B. das Addiren und das Subtrahiren schon beendigt ist, sobald man die Summe $a+\frac{b}{c}$ oder die Differenz $a-\frac{b}{c}$ gedacht und hingeschrieben hat; daß man daher in der obigen Regel nur angegeben findet, wie man diese, durch das Addiren und Subtrahiren erhaltenen Resultate $a+\frac{b}{c}$ und $a-\frac{b}{c}$, noch weiter umformt.

bei dem „Rechnen" mit allgemeinen Quotienten in denselben Worten ausdrücken, wenn man nur bezüglich statt der Worte „Bruch", „Zähler" und „Nenner" die Worte „Quotient", „Dividend" und „Divisor" schreibt.

§. 44.

Jede der fünf einfachsten Formen

$$+\alpha,\quad 0,\quad -\alpha,\quad +\frac{\alpha}{\beta}\quad \text{und}\quad -\frac{\alpha}{\beta},$$

welche wir positive ganze Zahl, Null, negative ganze Zahl, positive gebrochene und negative gebrochene Zahl nennen, und in welche (nach §. 42.) alle Ausdrücke, auch die zusammengesetztesten, umgeformt werden können, wenn sie aus ursprünglich wirklichen Zahlen und nur mittelst der vier erstern Operationen (Verstandes-Thätigkeiten), nämlich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zusammengesetzt sind, — also jede dieser fünf einfachsten Formen nennt man auch eine reelle Zahl.

Anmerkg. 1. Eine reelle Zahl ist also weit davon entfernt, eine wirkliche Zahl zu sein, denn sie ist jedesmal nur eine Form, ein Ausdruck, eine angezeigte Operation, oder eine Folge zweier angezeigter Operationen, also der Ausdruck einer Reihe von gedachten und eben deshalb von wirklichen Verstandes-Thätigkeiten, also ein Ausdruck, mit welchem gerade deshalb im Sinne des §. 9. und nach den Gesetzen (Formeln NN. 1.—46. der §§. 20.—40.) „gerechnet" werden kann, nach denen sich diese Verstandes-Thätigkeiten richten.

Anmerkg. 2. Man hört häufig das Wort: „ausrechnen". Wenn das Rechnen (nach §. 9.) nichts weiter als ein Umformen gedachter oder gegebener Ausdrücke ist, so folgt von selbst, daß man jede Form wieder in eine neue Form umformen kann, daß daher das Umformen eigentlich nie zu Ende geht. — Allein in der Regel hat man bei dem Umformen, d. h. bei dem Rechnen, einen Zweck. So wie man aber bei dem zweckgemäßen Umfor-

men auf diejenige Form gekommen ist, welche dem vorgesetzten Zwecke entspricht, so hat man zu Ende gerechnet d. h. ausgerechnet, welches soviel sagen will als: „mit diesem Rechnen ist's nun aus", d. h. ich höre jetzt auf weiter zu rechnen, weil ich meinen Zweck bereits erreicht habe.

Hat man daher einen aus ursprünglich wirklichen Zahlen mittelst der angeführten vier erstern Operationen zusammengesetzten Ausdruck so lange umgeformt, bis man eine der fünf von einander specifisch verschiedenen (d. h. nie einander gleichen) einfachsten Formen gefunden hat, welche wir „reelle Zahlen" nennen, so sagt man häufig: „man habe den Ausdruck ausgerechnet", weil in der Regel (wenn auch nicht nothwendig immer) diese einfachste Form auch die gewünschte ist.

§. 45.

Wir haben im §. 2. festgestellt, woran man die größere und die kleinere Zahl erkennt. — In der Analysis wird nun aber der Begriff des „Größeren" und „Kleineren" auch auf die Rechnungsformen ausgedehnt [welche weder Größen noch wirkliche (ganze, unbenannte) Zahlen sind und], welche wir so eben reelle Zahlen genannt haben und zwar auf folgende Weise:

Bedeuten a und b zwei beliebige reelle Zahlen, so sagt man „a sei größer als b" oder „b sei kleiner als a", und schreibt dies so:

$$a > b \quad \text{oder} \quad b < a,$$

wenn $a-b$ positiv oder $b-a$ negativ ist*).

Beispiele. Dieser Definition zu Folge ist also

$8>3$, $1>\frac{3}{5}$, $3>0$, $\frac{2}{3}>-1$, $-2>-5$, $\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}<-\frac{2}{3}$, $0>-\frac{3}{2}$,

u. s. w. f.

*) D. h. wenn $a-b$ in eine positive ganze oder gebrochene Zahl (oder $b-a$ in eine negative ganze oder gebrochene) umgeformt werden kann.

§. 46.

Daraus folgt aber unmittelbar:

Sind a und b und m beliebige reelle Zahlen, und $a>b$ d. h. $a-b$ positiv, so ist offenbar $(a+m)-(b+m)=(a-m)-(b-m)[=a-b]$ noch immer positiv; dagegen $(m-a)-(m-b)[=b-a]$ nothwendig negativ.

Ferner ist $am-bm[=(a-b)m]$ und $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\left[=\frac{a-b}{m}\right]$ positiv, wenn m positiv, dagegen negativ, wenn m negativ ist. — Endlich ist $\frac{m}{a}-\frac{m}{b}\left[=\frac{mb-ma}{ab}=\frac{m(b-a)}{ab}\right]$ positiv, wenn $\frac{m}{ab}$ negativ ist, dagegen negativ, wenn $\frac{m}{ab}$ positiv ist.

Dieselben Resultate können nun auch mit folgenden Worten gegeben werden:

Ist vorausgesetzt $a>b$,

so ist allemal 1) $a+m>b+m$,

2) $a-m>b-m$,

3) $m-a<m-b$;

dagegen ist unter derselben Voraussetzung

4) $am \gtrless bm$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist,

5) $\frac{a}{m} \gtrless \frac{b}{m}$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist,

und 6) $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{m}{b}$, je nachdem $\frac{m}{ab}\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Anmerkung. Sind a und b beide positiv oder beide negativ, so ist ab positiv, und dann ist $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{m}{b}$, je nachdem m $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist, wenn nur $a>b$ angenommen wurde.

§. 47.

Sind a, b, c beliebige reelle Zahlen, und ist vorausgesetzt

$$a>b \quad \text{und} \quad b>c,$$

so ist auch

$$a>c.$$

Denn da $a-b$ und $b-c$ positiv sind, so ist auch ihre Summe $(a-b)+(b-c)$ d. h. $a-c$ positiv.

§. 48.

Sind a, b, c, d beliebige reelle Zahlen, und ist vorausgesetzt

$$a>b \quad \text{und} \quad c>d,$$

so ist nothwendig 1) $a+c>b+d$

und 2) $a-d>b-c$.

Denn es ist $a-b$ und $c-d$, also auch ihre Summe $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)=(a-d)-(b-c)$ positiv.

Dagegen ist unter derselben Voraussetzung

3) $ac>bd$, wenn b und c positiv sind, (wo dann a nothwendig auch positiv sein muß, weil sonst nicht $a>b$ sein könnte); aber

4) $ac<bd$, wenn b und c beide negativ sind.

Denn es folgt (nach §. 46. N. 4.)

aus $a>b$, daß $ac \gtrless bc$, wenn c $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

und aus $c>d$, daß $bc \gtrless bd$, wenn b $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$,

und so geht (aus §. 47.) die hiesige Behauptung hervor.

Sind endlich a und b beide positiv, so ist nothwendig, wenn $a>b$ vorausgesetzt wird, auch

$$aa>bb,$$

$$aaa>bbb,$$

$$aaaa>bbbb,$$

$$a^m>b^m,$$

wenn wir, der Kürze wegen, unter m die Anzahl der Faktoren a oder b uns denken, d. h. unter p^m das Produkt $p \cdot p \cdot p \cdot p \cdots$, in welchem der Faktor p, mmal vorkommt. (Vgl. §. 31.)

Anmerkung. Sind dagegen a und b beide negativ, und dabei $a > b$, so ist dann

$$aa < bb,$$
$$aaa > bbb,$$
$$aaaa < bbbb,$$
$$aaaaa > bbbbb,$$
$$aaaaaa < bbbbbb,$$

also $a^m > b^m$, wenn m kein Vielfaches von 2,

und $a^m < b^m$, wenn m ein Vielfaches von 2 ist.

§. 49.

Ferner folgt noch, wenn a und b positiv sind:

1) Ist $a > b$, so ist auch:

$$\frac{a}{b} > \frac{b}{b} \text{ und } \frac{b}{a} < \frac{a}{a} \text{ d. h.}$$

$$\frac{a}{b} > 1 \text{ und } \frac{b}{a} < 1.$$

2) Ein echter Bruch ist daher immer kleiner als 1, ein unechter Bruch dagegen immer größer als 1.

3) Von zwei Brüchen, welche gleiche Nenner haben, ist derjenige der größeste, welcher den größesten Zähler hat. — Ein ähnliches von Quotienten überhaupt, deren Dividenden und Divisoren ganzen oder gebrochenen oder gemischten Zahlen *) gleich sind. — Solche Quotienten der letztern Art nennt man wohl auch Bruchsbrüche.

4) Von zwei Brüchen, die gleiche Zähler haben, ist derjenige

*) Eine gemischte Zahl nennt man gewöhnlich die Summe aus einer ganzen Zahl und einem ächten Bruch.

der größeste, der den kleinsten Nenner hat. — Ein ähnliches von Bruchsbrüchen.

5) Von zwei Brüchen ist derjenige der größeste, welcher den größesten Zähler, dagegen den kleinsten Nenner hat. — Ein ähnliches von Bruchsbrüchen.

6) Das Produkt zweier oder mehrerer echten Brüche ist kleiner als jeder der Faktoren.

7) Das Produkt zweier oder mehrerer unechten Brüche oder gemischten Zahlen ist aber immer größer als jeder der Faktoren.

Drittes Kapitel.

Anwendung der bisher aufgestellten allgemeinen Gesetze der Zahlenverbindungen der ersten und der zweiten Art, zur Auffindung besonderer Eigenschaften der Zahlen selbst.

Wir kehren nun zu den Zahlen der Zahlenreihe zurück und setzen voraus, daß alle in diesem Kapitel vorkommenden Zahlen wirkliche sind, d. h. ganze Zahlen (§. 43.); es müßte denn ausdrücklich das Gegentheil angemerkt sein.

§. 50. Erklärung.

Die durch das Produkt

$$ba$$

bezeichnete Zahl nennt man ein Vielfaches (und zwar das bfache) von a, und auch ein Vielfaches (das afache) von b.

Eine Zahl a nennt man durch eine andere Zahl b theilbar, wenn der Quotient $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl vorstellt; oder, was dasselbe ist, wenn es eine ganze Zahl c gibt, so daß $cb = a$. — Die Zahl b nennt man das Gemäß oder den Theiler, die Zahl c oder $\frac{a}{b}$ aber, das Maaß von a für den Theiler b.

Anmerkung. Was hier Gemäß genannt wurde, wird gewöhnlich das „Maaß" genannt, worauf wir ausdrücklich noch aufmerksam machen wollen.

§. 51.

Ist a durch b theilbar, so ist a ein Vielfaches von b. Umgekehrt: ist a ein Vielfaches von b, so ist a durch b theilbar.

§. 52.

Es geht auch noch hervor:

1) Die Summe und die Differenz zweier durch m theilbaren Zahlen, ist ebenfalls durch m theilbar (aus NN. 31. 32. des §. 37.).

2) Das Produkt, dessen einer Faktor eine durch m theilbare Zahl ist, ist ebenfalls eine durch m theilbare Zahl (N. 25. des §. 37.).

3) Jede Zahl ist durch 1 theilbar.

4) Jede Zahl ist durch sich selber theilbar und zugleich ihr größter Theiler.

5) Ist c durch b, und b wieder durch a theilbar, so ist auch c durch a theilbar, so wie auch das Maaß $\frac{c}{a}$ theilbar durch das Maaß $\frac{c}{b}$ und auch durch das Maaß $\frac{b}{a}$ $\left(\text{weil } \frac{c}{a}:\frac{c}{b}=\frac{b}{a} \text{ und } \frac{c}{a}:\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \text{ ist}\right)$.

6) Ist c durch a und durch b theilbar, und auch das Maaß $\frac{c}{a}$ durch das Maaß $\frac{c}{b}$ theilbar, so ist auch b durch a theilbar $\left(\text{weil } \frac{c}{a}:\frac{c}{b}=\frac{b}{a} \text{ ist}\right)$.

7) Ist jede der Zahlen a, b, c, ꝛc. durch m, und m wieder durch n theilbar, so ist auch jede der Zahlen a, b, c, ꝛc. durch n theilbar; $\left(\text{denn es ist } \frac{a}{n}=\frac{a}{m}\cdot\frac{m}{n}; \text{ u. s. w. f.}\right)$.

8) Ist c durch b, und b wieder durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar, so ist auch c durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc.

theilbar; und die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ 2c. sind alle durch das Maaß $\frac{c}{b}$ theilbar $\left(\text{denn es ist z. B. } \frac{c}{m} : \frac{c}{b} = \frac{b}{m}\right)$.

9) Das Produkt $m \cdot n \cdot p \cdots$ ist durch jeden der Faktoren m, n, p, 2c. theilbar, so wie auch durch das Produkt aus einer beliebigen Zahl der Faktoren z. B. durch mn, mp, 2c.

10) Auch das Produkt $a \cdot mnp$ 2c. ist durch jede der Zahlen m, n, p, 2c. theilbar. — Es lassen sich daher unbestimmbar viele Zahlen denken, die größer sind, als das Produkt m, n, p, 2c. und dabei durch jede der Zahlen m, n, p, 2c. theilbar.

Man beweist alle diese Sätze aus den allgemeinen Formeln des 2ten Kapitels, höchst einfach, den gegebenen Begriffen getreu.

§. 53.

Jedes Vielfache von zwei, heißt eine gerade Zahl. Jede ganze Zahl, welche keine gerade ist, nennt man eine ungerade.

§. 54.

1) Das Produkt $2n$ gibt alle geraden Zahlen, so wie die Summe $2n+1$ alle ungeraden, wenn n eine jede ganze Zahl, im letztern Fall auch noch Null bedeutet.

2) Eine ungerade Zahl ist nie durch eine gerade theilbar; wohl aber kann eine gerade Zahl durch eine ungerade theilbar sein.

3) Die Summe, die Differenz und das Produkt zweier geraden Zahlen, ist immer eine gerade Zahl.

4) Die Summe und die Differenz zweier ungeraden Zahlen ist eine gerade Zahl, dagegen das Produkt derselben ungerade.

5) Die Summe und die Differenz einer geraden und einer ungeraden Zahl ist immer ungerade; ihr Produkt dagegen gerade.

6) Auch ist noch

$$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)\cdot(-d)\cdots = \pm abcd\cdots,$$

wo das obere oder das untere (+) oder (−) Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl der subtraktiven Faktoren gerade oder ungerade ist.

§. 55.

Ist a durch b nicht theilbar, so gibt es immer zwei auf einander folgende Zahlen, q und q+1, so, daß

$$qb<a \quad \text{und} \quad (q+1)b>a,$$

wird, wenn nur $a>b$ ist. — Diese Zahl q nennt man den **nächst kleinsten**, so wie $q+1$ den **nächst größten Quotienten** der beiden Zahlen a und b. — Die Differenz $a-bq$ heißt der **Rest**.

Im Falle $a<b$, hieße 0 der **nächstkleinste**, so wie 1 der **nächstgrößte** Quotient dieser beiden Zahlen.

§. 56.

1) Bezeichnet man den Rest durch r, so hat man

$$a-bq=r, \quad a=bq+r, \quad \text{und} \quad r<b.$$

2) Im Falle aber $a<b$, ist $q=0$, $bq=o$ und $a=r$, also wieder $r<b$.

3) Sind a und b beide durch m theilbar, so ist auch der Rest r durch m theilbar (§. 52. N. 1. und 2.); und ist der Divisor b und der Rest r durch m theilbar, so ist solches auch der Dividend a.

4) Es seien

$$q, \quad q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad q_4, \quad \text{etc. etc.}$$

bezüglich die **nächstkleinsten Quotienten** von

$$\frac{a}{b}, \quad \frac{b}{r}, \quad \frac{r}{r_1}, \quad \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{r_2}{r_3}, \quad \text{etc. etc.}$$

und die bezüglich zugehörigen Reste seien

$$r, \; r_1, \; r_2, \; r_3, \; r_4, \; \text{ꝛc. ꝛc.}$$

Ist ferner z. B. $r_4 = 0$, also $\frac{r_2}{r_3} = q_4$ eine ganze Zahl (und daher q_4 nicht der nächstkleinste, sondern der genaue Quotient), so sind alle Zahlen a, b, r, r_1, r_2, durch den letzten Rest r_3 theilbar. Aus N. 3. zu Ende; weil jeder spätere Dividend früherer Divisor ist, der angeführte Satz also immer auf's Neue angewandt werden kann.

5) Auch ist r_3 die größte Zahl, welche die beiden Zahlen a und b zugleich theilet. (Indirekt aus N. 3. und §. 52. N. 4.; jeder größere gemeinschaftliche Theiler von a und b würde nämlich (nach dem Anfang der N. 4.) auch den Rest r, und daher alle Reste theilen, also auch den letzten).

Man sieht leicht, wie der Satz 4., daher auch die aus ihm hervorgehenden Sätze allgemein ausgesprochen werden können.

6) Es gibt Vielfache von a und von b, deren Differenz dem Rest r, und andere solche Vielfache deren Differenz dem Rest r_1 gleich ist. —

Denn man hat, nach der Annahme:

$$r = a - bq \quad \text{und} \quad r_1 = b - r \cdot q_1 = (qq_1 + 1)b - q_1 a \quad (\text{N. 1.}).$$

7) Es gibt daher auch Vielfache von a und von b, deren Differenz irgend einem andern der Reste r_2, r_3 ꝛc. gleich ist. —

Denn es seien z. B. $r_2 = ma - nb$ und $r_3 = n_1 b - m_1 a$, so ist auch, wegen $r_4 = r_2 - r_3\, q_4$, noch:

$$r_4 = (m + m_1 q_4)a - (n + n_1 q_4)b,$$

d. h. sobald es für zwei auf einander folgende der Reste r_2 und r_3, solche Vielfache von a und b gibt, so gibt es auch solche Vielfache für den nächstfolgenden Rest r_4; deshalb folgt der Satz aus N. 6.).

8) Ist daher einer der Reste gleich 1 (dann ist 1 der größte Theiler von a und von b zugleich, nach N. 5.), so gibt es allemal Vielfache von a und von b, deren Differenz gleich Eins ist.

9) Es gibt unendlich viele Paare von Vielfachen von a und b, deren Differenz dieselbe Zahl r ist, sobald es **ein** solches Paar gibt. — Hat man nämlich:

$$ma - nb = r, \text{ so ist auch}$$
$$(da - n)b - (db - m)a = r,$$

wo d eine beliebige Zahl bezeichnet.

10) Hat man daher $ma - nb = 1$, so ist auch noch $(da - n)b - (db - m)a = 1$; d. h. es gibt dann unendlich viele Vielfache von a und von b, deren Differenz $= 1$.

11) Lassen a und b durch p dividirt, einerlei Rest r, so ist $a - b$ durch p theilbar.

12) Ist $a - b$ durch p theilbar, und läßt die eine dieser Zahlen durch p dividirt, den Rest r, so ist dies auch bei der andern der Fall.

§. 57. Erklärung.

Eine Zahl, welche durch jede der Zahlen m, n, p, ꝛc. theilbar ist, nennt man das **gemeinschaftliche Vielfache** der Zahlen m, n, p, ꝛc. Die kleinste ihrer Art heißt dann das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** dieser Zahlen.

Eine jede Zahl, durch welche mehrere andere Zahlen a, b, c, ꝛc. zugleich getheilt werden können, nennt man das **gemeinschaftliche Gemäß**, oder den **gemeinschaftlichen Theiler**. — Die größte ihrer Art heißt dann der **größte gemeinschaftliche Theiler** der Zahlen a, b, c, ꝛc.

Eine Zahl, welche außer der 1 durch keine andere Zahl theilbar ist, heißt eine **absolute Primzahl**, oder bloß **Primzahl**. Jede andere heißt eine **zusammengesetzte Zahl**.

Zwei oder mehr Zahlen, die außer der 1 kein gemeinschaftliches Gemäß haben, heißen **relative Primzahlen**, auch „**Primzahlen unter sich**." — Im entgegengesetzten Falle nennt man sie **relativ zusammengesetzte Zahlen**.

§. 58.

Hieraus folgt:

1) Ist c ein gemeinschaftliches Vielfache von m, n, p, 2c., und sind die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ 2c. nicht relative Primzahlen, (d. h. haben sie noch ein gemeinschaftliches Gemäß μ), so gibt es auch ein anderes gemeinschaftliches Vielfache von m, n, p, 2c., nämlich $\frac{c}{\mu}$, welches kleiner als c, und ein Gemäß (Theiler) von c ist.

Denn, da $\frac{c}{m} = \mu\alpha$, $\frac{c}{n} = \mu\beta$, $\frac{c}{p} = \mu\gamma$, 2c. sein soll, so ist auch $\frac{c}{\mu} = m\alpha$, $\frac{c}{\mu} = n\beta$, $\frac{c}{\mu} = p\gamma$, 2c. 2c. d. h. $\frac{c}{\mu}$ ist durch m, n, p, 2c. theilbar.

2) Ist daher b das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n, p, 2c., so müssen die Maaße $\frac{b}{m}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{p}$ 2c. relative Primzahlen sein.

3) Jedes gemeinschaftliche Vielfache c, ist durch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache b theilbar. —

Denn ließe $\frac{c}{b}$ den Rest r, so wäre auch r ein gemeinschaftliches Vielfache derselben Zahlen (§. 56. N. 3.), folglich b nicht das kleinste.

4) Sind die Maaße $\frac{c}{m}$, $\frac{c}{n}$, $\frac{c}{p}$ 2c. relative Primzahlen, so ist c das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen m, n, p, 2c. (Indirekt aus N. 2. und N. 3.).

5) Ist $ad - bc = 1$, so ist jeder Faktor des ersten Produkts mit jedem Faktor des zweiten eine relative Primzahl.

Denn wäre a und c durch μ theilbar, so wäre auch $ad - bc$ also 1 durch μ theilbar. (Vergl. §. 56. N. 8. 2c. 2c.).

6) Ist $ad - bc = 0$, d. h. $ad = bc$, und sind a und b relative Primzahlen, so ist c durch a, und d durch b theilbar.

Weil cd ein Vielfaches von c und d, dagegen ad oder bc das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von c und von d ist (N. 3. und N. 4.).

7) Sind a und b relative Primzahlen und ist bc durch a theilbar, so ist auch c durch a theilbar. —

Weil dann $bc = ad$, (N. 6.).

8) Ist das Produkt $abcd \cdots$ durch m theilbar, und sind m und b, m und c, m und d, ꝛc. relative Primzahlen, so ist a durch m theilbar. (N. 7.).

9) Sind a und c relative Primzahlen, und ist μ ein Gemäß (Theiler) von a, so sind auch μ und c relative Primzahlen. (Indirekt.).

10) Sind a und b, eben so a und c relative Primzahlen, so sind auch a und bc dergleichen.

Denn hätten a und bc ein gemeinschaftliches Gemäß μ, so wären auch μ und b, eben so μ und c, Paare relativer Primzahlen (nach N. 9.), dabei aber $bc = \mu d$ was gegen N. 6.) ist.

11) Sind a und b, a und c, a und d, ꝛc. relative Primzahlen, so sind auch a und $bcd \cdots$ relative Primzahlen.

12) Sind daher jede der Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots$ mit jeder der Zahlen a, b, c, d, ꝛc. relative Primzahlen, so sind auch die Produkte $\alpha\beta\gamma\delta \cdots$ und $abcd \cdots$ relative Primzahlen. (N. 11.).

13) Derselbe Satz gilt auch umgekehrt; d. h.: Ist das Produkt $\alpha\beta\gamma\delta \cdots$ mit dem Produkt $abcd \cdots$ eine relative Primzahl, so ist jeder einzelne Faktor des ersten Produkts, mit jedem einzelnen Faktor des zweiten, eine relative Primzahl. (Indirekt.).

14) Sind also α und a relative Primzahlen, so sind auch α^m und a^b, desgleichen auch α^m und a^m (wo m, b, beliebige wirkliche Zahlen sind) relative Primzahlen. (§. 7.).

15) Desgleichen sind dann auch noch die Produkte

$$\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c \cdots \quad \text{und} \quad \pi^p \cdot \varrho^r \cdot \sigma^s \cdots$$

relative Primzahlen, wenn die einzelnen Zahlen α, β, γ, ꝛc. mit

den einzelnen Zahlen π, ϱ, σ, ꝛc. relative Primzahlen sind. (NN. 13. 14.).

Dasselbe gilt natürlich auch dann noch, wenn α, β, γ, ꝛc. π, ϱ, σ, ꝛc. absolute Primzahlen sind.

16) Das Produkt $\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c \cdot \delta^d \ldots$, wo α, β, γ, δ, ꝛc. absolute Primzahlen sind, a, b, c, d, ꝛc. aber beliebige Zahlen, ist weder durch α^A, noch durch β^B, noch durch γ^C, noch durch δ^D, ꝛc. theilbar, so lange $A > a$, oder $B > b$, oder $C > c$, oder $D > d$, ꝛc. (N. 8. und N. 14.).

17) Jede Zahl die keine absolute Primzahl ist, läßt sich in Faktoren zerlegen, die absolute Primzahlen sind. — Jede solche Zahl läßt sich daher in ein Produkt von der Form $\alpha^a \cdot \beta^b \cdot \gamma^c$ ꝛc. zerlegen, wo α, β, γ, ꝛc. absolute Primzahlen, a, b, c, ꝛc. aber beliebige Zahlen vorstellen.

18) Jede zusammengesetzte Zahl a besteht aus, an sich und ihrer Anzahl nach, völlig bestimmten absoluten Primzahlen, deren Produkt der Zahl a gleich ist; so daß jedes andere Produkt, welches nicht genau dieselben Primzahlen zu Faktoren hat, dieser Zahl nicht gleich sein kann. (Indirekt aus N. 6.).

§. 59. Erklärung.

Die Primzahlen, welche die Faktoren einer gegebenen Zahl ausmachen, nennt man **die einfachen Faktoren** dieser Zahl.

§. 60.

1) Kommen unter den einfachen Faktoren von a, alle einfachen Faktoren von b vor, und letztere in keiner größern Anzahl, so ist a durch b theilbar.

2) Wenn eine unter den einfachen Faktoren von b vorkommende Primzahl, nicht unter denen von a vorkommt, so ist a durch b nicht theilbar; eben so wenn derselbe Faktor in b öfter vorkommt als in a.

3) Sind die Zahlen a, b, c, ꝛc. in ihre einfachen Faktoren zerlegt, so ist das Produkt aller, allen gegebenen Zahlen a, b,

c, ꝛc. gemeinschaftlichen Faktoren, das größte gemeinschaftliche Gemäß. (Indirekt aus 2.).

4) Die aus dem größten gemeinschaftlichen Gemäß sich ergebenden Maaße, sind nothwendig relative Primzahlen.

5) Sind daher $\frac{a}{p}$, $\frac{b}{p}$, $\frac{c}{p}$, ꝛc. nicht relative Primzahlen, sondern haben sie ein gemeinschaftliches Gemäß μ, so ist p nicht das größte gemeinschaftliche Gemäß von a, b, c, ꝛc., sondern μp ist ein größeres.

6) Das größte gemeinschaftliche Gemäß muß durch jedes kleinere theilbar sein.

7) Ist n nicht das größte gemeinschaftliche Gemäß, so sind die Maaße nicht relative Primzahlen.

8) Sind daher die Maaße $\frac{a}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{c}{n}$ ꝛc. relative Primzahlen, so ist n das größte gemeinschaftliche Gemäß von a, b, c, ꝛc.

9) Sind a, b, c, ꝛc. relative Primzahlen, so ist 1 ihr größtes gemeinschaftliches Gemäß.

10) Die Zahl a, welche zu einfachen Faktoren hat: alle einfachen Faktoren von m und noch alle diejenigen von n, welche nicht beiden Zahlen m und n gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m und n.

Die Zahl b, welche alle einfachen Faktoren von a und noch diejenigen von p hat, welche nicht beiden Zahlen a und p gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n und p.

Die Zahl c, welche alle einfachen Faktoren von b und noch diejenigen von q hat, welche beiden, der b und der q nicht gemeinschaftlich sind, ist das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von m, n, p und q; u. s. w. f.

Auf diese Weise erhält man sehr leicht die einfachen Faktoren

des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen gegebener Zahlen m, n, p, ꝛc.

11) Ist das größte gemeinschaftliche Gemäß von a und b durch μ bezeichnet, so ist $\frac{a}{\mu} \cdot b$ oder $a \cdot \frac{b}{\mu}$ oder $\frac{ab}{\mu}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b. (N. 10.).

12) Ist p das größte gemeinschaftliche Gemäß von a und b, q das größte von p und c, r das größte von q und d, so ist auch r das größte gemeinschaftliche Gemäß von allen Zahlen a, b, c, d. — Gilt auch für beliebig viel Zahlen.

13) Ist p das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a und b, q das von p und c, r das von q und d, so ist auch r das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von a, b, c, d (N. 10.). — Gilt ebenfalls für eine beliebige Menge von Zahlen.

§. 61.

Es seien a, b, c, ꝛc. Zahlen, die alle größer als 1, und es sei μ ihr kleinstes gemeinschaftliches Vielfache, so kann man noch folgende Eigenschaften der Zahlen bemerken:

1) Läßt N durch μ dividirt den Rest φ, so ist $N-\mu q = \varphi$, und $N-\varphi = \mu q$, folglich lassen N und φ durch a, b, c, ꝛc. dividirt, bezüglich einerlei Reste. (§. 56. N. 12.). — Dabei ist immer $\varphi < \mu$. — Außer dieser Zahl φ gibt es keine andere mehr, welche kleiner als μ, und durch dieselben Zahlen a, b, c, ꝛc. dividirt, dieselben Reste ließe. (Indirekt aus §. 58. N. 3.).

2) Sind M und N um ein Vielfaches von μ unterschieden, d. h. ist $M-N = \mu q$, so lassen M und N durch a, b, c, ꝛc. dividirt, bezüglich einerlei Reste.

3) Lassen M und N durch a, b, c, ꝛc. dividirt, bezüglich einerlei Reste, so lassen sie auch durch μ dividirt, einerlei Reste.

4) Gibt es eine Zahl φ, welche kleiner als μ und durch a, b, c, ꝛc. dividirt, bezüglich gegebene Reste α, β, γ, ꝛc. läßt,

so ist sie doch die einzige ihrer Art, daher durch die gegebenen Reste α, β, γ, ⋯ völlig bestimmt. (N. 1.).

5) Sind von den Zahlen a, b, c, ꝛc. je zwei ein Paar relativer Primzahlen, so ist $\mu = a \cdot b \cdot c \cdots$; und es existirt dann für beliebig gegebene Reste α, β, γ, ꝛc. allemal eine solche Zahl φ der (N. 4.). —

Denn es sind ab und c, auch ac und b, auch bc und a Paare relativer Primzahlen, folglich sind allemal Zahlen möglich m, m_1, m_2, n, n_1, n_2, so daß

$$m \cdot ab - n \cdot c = 1$$
$$m_1 \cdot ac - n_1 \cdot b = 1$$
$$m_2 \cdot bc - n_2 \cdot a = 1 \quad \text{(§. 56. N. 8. N. 10.).}$$

Betrachtet man nun den Ausdruck

$$m \cdot ab\gamma + m_1 \cdot ac\beta + m_2 \cdot bc\alpha,$$

so ist dieser, dem gemäß, eine Zahl, welche durch a, b, c, dividirt, bezüglich die Reste α, β, γ, gibt; folglich gibt es auch eine Zahl φ, welche kleiner als μ ist und durch a, b, c, dividirt, dieselben Reste α, β, γ gibt. (N. 1.).

Derselbe Beweis läßt sich auf beliebig viel Zahlen erweitern.

6) Sind nicht je zwei der Zahlen a, b, c, ꝛc. relative Primzahlen, so ist $\mu < abc \cdots$, und μ ein Gemäß von $abc \cdots$ (§. 58. N. 3. §. 52. N. 9.); und dann gibt es nicht immer für gegebene Reste α, β, γ, ⋯ eine solche Zahl φ der (N. 4.). —

Denn haben a und c z. B. das gemeinschaftliche Gemäß m, so wäre

$\varphi = qa + \alpha = q_1 c + \gamma$ folglich

$\alpha - \gamma = qa - q_1 c$, daher $\alpha - \gamma$ durch m theilbar, mithin sind dann die Reste α und γ nicht mehr beliebig.

7) Sind a, b, c, ⋯ absolute Primzahlen, so ist $\mu = a \cdot b \cdot c \cdots$, und für alle Zahlen, die kleiner als μ, also kleiner als $abc \cdots$ sind, muß es, wenn sie durch a, b, c ⋯ dividirt werden, immer eine verschiedene Reihe der Reste geben. (N. 1.).

Es gibt daher so viele solcher Zahlen, die kleiner als μ und durch a, b, c ⋯ nicht theilbar sind, als sich verschiedene Reihen von Resten denken lassen, also $(a-1)(b-1)(c-1) \cdots$

solcher Zahlen (nicht mehr und nicht weniger). Alle diese Zahlen (nicht mehr und nicht weniger) sind gegen μ relative Primzahlen.

8) Ist aber φ gegen μ eine relative Primzahl, so ist auch die Zahl $N\mu+\varphi$ gegen μ eine relative Primzahl und läßt durch a, b, c ꝛc. dividirt, dieselben Reste. Umgekehrt gibt es nur die Zahlen $N\mu+\varphi$, welche durch a, b, c, ꝛc. dividirt, dieselben Reste als φ selbst lassen; also, wenn es Zahlen sein sollen, die zugleich $<k\mu$ sind, sind solche nur in der Reihe

$$\varphi,\quad \mu+\varphi,\quad 2\mu+\varphi, \cdots (k-1)\mu+\varphi$$

enthalten. Folglich gibt es $k(a-1)(b-1)(c-1)\cdots$ verschiedene Zahlen (nicht mehr und nicht weniger), welche kleiner als $k\mu$ oder $k \cdot abc\cdots$ und gegen μ oder $abc\cdots$, relative Primzahlen sind. Die Zahl k ist dabei eine beliebige Zahl der Zahlenreihe.

9) Nimmt man unter derselben Voraussetzung wie (N. 8.),

$$k = a^{A-1} \cdot b^{B-1} \cdot c^{C-1} \cdots,$$

so gibt es $a^{A-1} \cdot b^{B-1} \cdot c^{C-1} \cdots \times (a-1)(b-1)(c-1)\cdots$ verschiedene Zahlen, welche kleiner als $a^A \cdot b^B \cdot c^C \cdots$ und gegen μ oder $abc\cdots$ relative Primzahlen sind.

10) Eben so viele Zahlen gibt es daher, welche kleiner als $a^A \cdot b^B \cdot c^C \cdots$ und gegen diese Zahl $a^A \cdot b^B \cdot c^C \cdots$ selbst relative Primzahlen sind.

11) Da nun jede zusammengesetzte Zahl in ein Produkt von der Form

$$a^A \cdot b^B \cdot c^C \cdots$$

wo a, b, c, ꝛc. absolute Primzahlen sind, zerlegt werden kann (§. 58. N. 18.); so kann man danach sehr leicht bestimmen, wie viele Zahlen es gibt, welche kleiner als eine gegebene Zahl und sie selbst relative Primzahlen sind.

Anmerkung. In diesem Paragraphen ist die von einigen sogenannte Theorie der cyklischen Perioden enthalten.

§. 62. Erklärung.

Ein Bruch heißt in den kleinsten Zahlen ausgedrückt, wenn es keinen Bruch mehr gibt, der ihm gleich, dessen Zähler und Nenner aber bezüglich kleiner wären als Zähler und Nenner des gegebenen.

§. 63.

1) Sind Zähler und Nenner absolute oder relative Primzahlen, so ist der Bruch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt. (Indirekt aus §. 58. N. 6.).

2) Hat man Zähler und Nenner durch ihr größtes gemeinschaftliches Gemäß dividirt, so ist der neue Bruch in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt. (§. 60. N. 4.).

3) Sind zwei Brüche in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt und einander gleich, so sind auch die beiden Zähler einander gleich, eben so die beiden Nenner. (§. 58. N. 6.).

4) Ist $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt, so ist es auch $\frac{a^m}{b^m}$. (§. 7.). — Umgekehrt: Ist $\frac{a^m}{b^m}$ ein in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückter Bruch, so ist es auch $\frac{a}{b}$. (§. 58. N. 14.).

5) Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt und dabei $\frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d}\right)^m$, so ist nothwendig auch: $a = c^m$ und $b = d^m$. (N. 4. und N. 3.).

6) Ist daher $\left(\frac{g}{h}\right)^{m}$ *) $= \frac{p}{q}$ und μ das größte gemein-

---

*) Wir bezeichnen hier auf einen Augenblick durch q^m, auch wenn q schon allgemein gedacht ist, das Produkt $q \cdot q \cdot q \cdot q \cdots$ von m Faktoren.

schaftliche Gemäß von p und q, so wie ν das von g und h, so ist allemal:

$$\left(\frac{g}{\nu}\right)^m = \frac{p}{\mu} \quad \text{und} \quad \left(\frac{h}{\nu}\right)^m = \frac{q}{\mu}.$$

7) Es gibt keinen Bruch, der eine ganze Zahl geben könnte, wenn er auch noch so oft mit sich selbst multiplicirt würde. (§. 60. N. 2.).

8) Es gibt (zuweilen, aber) nicht immer einen Bruch, welcher 2, 3, oder m mal mit sich multiplicirt, einen gegebenen Bruch $\frac{a}{b}$ liefern könnte.

Denn es setzt dies voraus, daß wenn $\frac{a}{b}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist, dann ganze oder gebrochene Zahlen α und β existiren, so daß

$\alpha^m = a$ und $\beta^m = b$ ist. (N. 5.).

Solche gebrochene Zahlen existiren aber (nach N. 10.) nie; und solche ganze Zahlen nicht immer.

Viertes Kapitel.

Von den ganzen, den Differenz-Potenzen und von den (allemal eindeutigen) absoluten Wurzeln.

§. 64.

Das Zeichen a^b heißt eine **ganze Potenz**, wenn a ganz allgemein, dagegen b eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist. Die ganze Potenz a^b soll aber noch immer das Produkt $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots$ von b Faktoren andeuten, nur daß, weil a schon ganz allgemein gedacht ist, auch dieses Produkt bereits ein allgemeines geworden ist. (Vergl. §. 31.).

Anmerkung. Die ganze Potenz schließt die frühere Potenz des §. 7., wo a ebenfalls eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist, als einen besondern Fall in sich.

§. 65.

Von den ganzen Potenzen gelten noch immer die Sätze der Potenzen, wie sie früher (§. 15.) von denen hingestellt sind, welche wirkliche Zahlen (d. h. ganze) bezeichnen, nämlich:

1) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$; 2) $a^{b-c} = a^b : a^c$;

3) $(ab)^c = a^c \cdot b^c$; 4) $(a:b)^c = a^c : b^c$;

5) $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$.

Denn sie werden genau, wie oben im §. 15. geschehen, erwiesen.

§. 66.

Es ist aber auch noch, wenn b eine wirkliche (positive ganze) Zahl bedeutet

1) $1^b = 1$; 2) $0^b = 0$; 3) $a^{b+1} = a^b \cdot a$;

4) $(-a)^b = \pm a^b$; 5) $(-1)^b = \pm 1$;

wo jedesmal die obern (+) Zeichen gelten, wenn b eine gerade Zahl, die untern (−) Zeichen dagegen, wenn b eine ungerade Zahl ist.

6) Und sind a und b absolute (§. 43.) ganze oder gebrochene Zahlen, dabei $a > b$, so ist auch $a^c > b^c$, wenn c eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist; wie solches im §. 48. bereits gesagt worden.

7) Daraus folgt noch, wenn p eine absolute ganze oder gebrochene Zahl vorstellt und c eine wirkliche (positive ganze) Zahl,

$$p^c \gtreqless 1^c, \text{ d. h. } p^c \gtreqless 1,$$

je nachdem $p \gtreqless 1$ ist.

Und da, wenn $p \gtrless 1$ und positiv ist, auch (nach §. 46. N. 4.) $p^2 \gtrless p$, $p^3 \gtrless p^2$, $p^4 \gtrless p^3$, 2c. 2c. ist,

also alle folgenden Potenzen $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ werden als die vorhergehenden, je nachdem $p \gtrless 1$ ist, — so folgt

8) daß p^c dem $\left\{\begin{matrix}\text{Unendlich großen}\\ \text{Unendlich kleinen}\end{matrix}\right\}$ immer näher rückt, je größer die ganze (positive) Zahl c selbst gedacht wird, und je nachdem $p \gtrless 1$ ist *).

---

*) Um diesen Satz recht klar zu übersehen, darf man nur noch folgende Betrachtung hinzufügen.

Es ist allemal, wenn $p > 1$, nämlich $p = 1 + \frac{1}{n}$ ist,

§. 67. Erklärung.

Das Zeichen a^b heißt eine Differenz=Potenz, wenn b eine Differenz wirklicher (positiver ganzer) Zahlen $\alpha-\beta$ ist; und da, wenn $\alpha>\beta$, $a^b=a^{\alpha-\beta}=a^\alpha : a^\beta$ ist (§. 65. N. 2.), so wollen wir unter a^b noch immer den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$ verstehen, so wohl wenn $\alpha>\beta$, als auch wenn $\alpha \leqq \beta$ sein sollte. — Dabei sind a^α und a^β ganze Potenzen, welche (nach §. 64.) allgemeine Produkte bedeuten, und für welche die (§. 65.) hingestellten Sätze der Potenzen gelten.

Nach dieser Erklärung ist die Differenz=Potenz allgemeiner als die ganze Potenz und schließt die ganze Potenz als einen besondern Fall in sich.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+\frac{2}{n},$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3>\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)>1+\frac{3}{n},$$

u. s. w. f.

also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^c>1+\frac{c}{n}.$$

Nimmt man nun $c=dn$, so ist

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^c>1+d$, wie groß übrigens d und n gedacht sein mögen. Also kann $\left(1+\frac{1}{n}\right)^c$ größer als jede noch so groß gedachte bestimmte Zahl werden, d. h. unendlich groß.

Ist nun $p<1$, so kann man $p=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ setzen, und hat dann

$p^c=\frac{1^c}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^c}<\frac{1}{1+d}$; d. h. p^c kleiner als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl $\frac{1}{1+d}$. — Was aber immer noch kleiner werden kann als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl, das nennen wir unendlich klein.

Anmerkg. 1. Weil aber
$\alpha-\beta = (\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma) = (\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ ist; weil also b, wenn es die Differenz $\alpha-\beta$ vorstellt, zugleich die Differenzen $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ und $(\alpha-\gamma)-(\beta-\gamma)$ vorstellen wird, weil demnach die vorstehende Erklärung für die Bedeutung der Potenz a^b

einmal den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$,

ein andermal den Quotienten $\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\gamma}}$,

und ein drittesmal den Quotienten $\frac{a^{\alpha-\gamma}}{a^{\beta-\gamma}}$

vorstellen wird, so fragt sich zuerst mit Recht, ob diese 3 Bedeutungen einander gleich sein werden.

Es ist jedoch (nach §. 65.)

$$a^{\alpha+\gamma} = a^\alpha \cdot a^\gamma; \qquad a^{\beta+\gamma} = a^\beta \cdot a^\gamma;$$

eben so $a^{\alpha-\gamma} = a^\alpha : a^\gamma$ und $a^{\beta-\gamma} = a^\beta : a^\gamma$;

also sind die oberen drei Quotienten einander gleich *).

Die Differenz-Potenz a^b hat also jedesmal eine völlig bestimmte und nur eine einzige Bedeutung. Und deshalb gilt auch noch der Satz:

Gleiches mit Gleichem potenzirt, gibt wieder Gleiches, wenn auch die entstehenden Potenzen Differenz-Potenzen sind.

Anmerkg. 2. Nach dieser Erklärung muß man sich aber unter a^0 den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\alpha}$ d. h. 1 denken, weil $0 = \alpha-\alpha$ ist. — Und unter a^1 hat man sich den Quotienten $\frac{a^{\alpha+1}}{a^\alpha}$ d. h. $\frac{a^\alpha \cdot a}{a^\alpha}$ d. h. a selbst zu denken, weil $1 = (\alpha+1)-\alpha$ ist. —

---

*) Ganz die analoge Untersuchung mußte auch §. 32. bei Gelegenheit der Feststellung des Begriffes des Differenz-Produkts angestellt werden.

Ferner hat man sich unter $a^{-\beta}$ den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^{\alpha+\beta}}$ d. h. $\frac{a^\alpha}{a^\alpha \cdot a^\beta}$ d. h. $\frac{1}{a^\beta}$ zu denken, weil $-\beta = \alpha-(\alpha+\beta)$ ist.

§. 68.

Für diese Differenz-Potenzen gelten noch immer dieselben Formeln (§. 65.), wie für die ganzen Potenzen nämlich

47) $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$; 48) $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$;

49) $(ab)^m = a^m \cdot b^n$; 50) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

51) $(a^m)^n = a^{mn}$,

wenn nur überall m und n beliebige Differenzen ganzer Zahlen, d. h. beliebig positiv oder negativ ganz oder Null sind.

Um dies zu erweisen, setze man $\alpha-\beta$ statt m, ferner $\gamma-\delta$ statt n, so daß $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$ statt m+n und $(\alpha+\delta)-(\beta+\gamma)$ statt m−n zu stehen kommt, während die griechischen Buchstaben beliebige wirkliche (ganze, positive) Zahlen vorstellen. Die Frage, ob die Formel N. 47. wahr sei, ist keine andere Frage als: ob die Gleichung

$$\frac{a^{\alpha+\gamma}}{a^{\beta+\delta}} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{a^\gamma}{a^\delta}$$

eine richtige ist, und daran, daß die letztere richtig ist, kann Niemand zweifeln, welcher die Formeln des §. 65. für ganze Potenzen in Anwendung bringt.

Will man untersuchen, ob die Formel 49) wahr ist, so will man bloß wissen (nach §. 67.), ob die Gleichung

$$\frac{(ab)^\alpha}{(ab)^\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} \cdot \frac{b^\alpha}{b^\beta}$$

eine richtige ist, und die Richtigkeit dieser letztern erhellt unmittelbar aus der Anwendung des §. 65.

Will man endlich erfahren, ob auch die Formel 51) eine richtige ist, so erwäge man: Nach §. 67. bedeutet die Potenz

$(a^m)^n$ den Quotienten $\frac{(a^m)^\gamma}{(a^m)^\delta}$ oder $(a^m)^\gamma : (a^m)^\delta$

und die Potenz

a^m den Quotienten $\frac{a^\alpha}{a^\beta}$.

Der Ausdruck $(a^m)^n$ zur Linken in der N. 51.) bedeutet also (nach §. 67.) den Quotienten

$$P\ldots \qquad \left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\gamma : \left(\frac{a^\alpha}{a^\beta}\right)^\delta.$$

Die Potenz a^{mn} zur Rechten, bedeutet dagegen (nach §. 67.) den Quotienten

$$Q\ldots \qquad \frac{a^{\alpha+\delta}}{a^{\beta+\gamma}},$$

und daß die beiden Quotienten (P) und (Q) einander gleich sind, folgt unmittelbar aus der Anwendung des §. 65.

Die Richtigkeit der Formeln 48.) und 50.) folgt endlich aus den so eben bewiesenen, wenn man die zu erweisenden links und rechts mit dem Divisor (a^n und b^m) multiplicirt.

§. 69.

Aus dem Begriffe des §. 67., insbesondere aber aus den so eben bewiesenen Sätzen des §. 68. kann man nun leicht eine Reihe von Folgerungen ziehen.

Setzt man nämlich in N. 48. $m = n+1$ und denkt man sich n positiv ganz, so findet sich

52) $\qquad a^1 = a$, also auch $1^1 = 1$ und $0^1 = 0$,

weil a^{n+1} (nach §. 66.) $= a^n \cdot a$ ist; — wird ferner wiederum in N. 48. $m = n$ gesetzt, so giebt dies

53) $\qquad a^0 = 1$, also auch $1^0 = 1$,

wenn a nicht Null ist (§§. 35. 36.) *).

Und setzt man endlich $m = 0$ (in N. 48.), so ergiebt sich noch

---

*) Es ist $0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n} = \frac{0}{0}$ (so lange n positiv ganz), und $\frac{0}{0}$ ist nicht nothwendig $= 1$. (Vergl. §§. 35. 36.).

54) $$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

auch wenn n beliebig positiv oder negativ ganz oder Null ist.

§. 70.

Ist m positiv oder negativ ganz oder Null; sind a und b beliebig positiv (ganz oder gebrochen) und ist

$$a > b,$$

so ist auch

$$a^m \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} b^m, \text{ je nachdem m } \begin{Bmatrix} \text{positiv ganz} \\ \text{Null} \\ \text{negativ ganz} \end{Bmatrix}$$

ist.

Daß $a^m > b^m$ ist, wenn m positiv ganz, ist bereits (§. 66. N. 6. und §. 48.) bewiesen. — Ist aber α eine positive ganze Zahl, also mit $a > b$ auch $a^\alpha > b^\alpha$; und ist $m = -\alpha$ vorausgesetzt, also negativ ganz, so ist (nach N. 54.)

$$a^m = \frac{1}{a^\alpha} \quad \text{und} \quad b^m = \frac{1}{b^\alpha};$$

also, weil $a^\alpha > b^\alpha$ ist, auch $a^m < b^m$.

§. 71. Erklärung.

Wenn a eine absolute (positive) ganze oder gebrochene Zahl (§. 43.) oder Null, b dagegen eine wirkliche (positive ganze) Zahl ist, so heiße die Wurzel

$$\sqrt[b]{a}$$

eine absolute und bedeute die absolute ganze oder gebrochene Zahl oder die Null, welche mit b potenzirt, a wiedergibt.

Anmerkg. Diese absolute Wurzel enthält die frühere Wurzel des §. 7., wo a ebenfalls eine wirkliche (positive ganze) Zahl war, und wo auch $\sqrt[b]{a}$ selbst eine solche bezeichnete (daher nicht immer möglich war), als einen besondern Fall in sich.

Zu gleicher Zeit erhellet, daß man die Definition der Wur-

zel $\sqrt[b]{a}$ zugleich für den Fall erweitert geben könnte, wo b eine Differenz wirklicher Zahlen ist. Weil aber solche Wurzeln keine praktischen Vortheile gewähren, so hat man sich hier mit dem beschränkteren Begriff begnügt.

§. 72.

Es fragt sich nun wieder zunächst 1) ob die absolute Wurzel $\sqrt[b]{a}$ (des §. 71.) allemal eine Bedeutung hat, und 2) ob allemal auch nur eine einzige Bedeutung.

Es ist aber, wenn p und q absolute (ganze oder gebrochene positive) Zahlen sind und $p > q$ ist, auch allemal, weil b eine positive ganze Zahl sein soll (nach §. 66. N. 6.) $p^b > q^b$. — Existirt also eine absolute Zahl x, so, daß $x^b = a$ wird, so hat weder eine größere noch eine kleinere Zahl dieselbe Eigenschaft, weil die erstere mit b potenzirt, mehr als x^b, die andere mit b potenzirt dagegen weniger als x^b geben wird. — Hat demnach die absolute Wurzel $\sqrt[b]{a}$ wirklich eine Bedeutung, so hat sie doch immer nur eine einzige.

Was aber die erste Frage anbelangt, so wissen wir, daß wenn z. B. a selber eine ganze Zahl ist, dann nicht immer eine ganze Zahl existirt, welche mit b potenzirt, a geben könnte; und eben so wissen wir, daß eine gebrochene Zahl $\frac{p}{q}$ wenn sie mit b potenzirt wird, nie eine ganze Zahl a geben kann (nach §. 63. N. 7.); daß also für die meisten Werthe von a in ganzen Zahlen, weder eine ganze noch eine gebrochene Zahl existiren wird, welche unter $\sqrt[b]{a}$ gedacht werden kann. Eben so wissen wir (aus §. 63. N. 8.), daß wenn a eine gebrochene Zahl $\frac{\alpha}{\beta}$ ist, in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt, dann auch keine ganze und keine gebrochene Zahl existirt, die mit b potenzirt, a oder $\frac{\alpha}{\beta}$

geben könnte, als nur in dem Fall, wo $\sqrt[b]{\alpha}$ und $\sqrt[b]{\beta}$ selbst (ganze positive) wirkliche Zahlen sind, d. h. wo α und β auf die Form γ^b und δ^b gebracht werden können, und wo dann $\sqrt[b]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\gamma}{\delta}$ allemal eine gebrochene Zahl ist.

Anmerkung. Auf der andern Seite dagegen kann man sich zwischen 0 und 1 die gebrochenen Zahlen stetig wachsend denken; und es scheint dann, als wenn die bten Potenzen dieser stetig wachsenden Reihe, ebenfalls eine stetig wachsende Reihe von gebrochenen Zahlen bilden müßten. Und weil dasselbe wieder zwischen 1 und 2, 2 und 3, u. s. w. f. gelten zu können scheint, so scheint es, als wenn die bten Potenzen einer von 0 bis in's Unendliche stetig fort wachsend gedachten Reihe, ebenfalls eine stetig wachsende Reihe von ganzen und gebrochenen Zahlen bilden müßten, so daß jede gegebene ganze oder gebrochene Zahl a sich darunter befinden könnte. — Diese Betrachtung veranlaßt eine Untersuchung und diese Untersuchung führt uns zu Folgendem.

§. 73. Lehrsatz.

Ist a eine beliebige gegebene ganze oder gebrochene absolute (positive) Zahl, b dagegen eine wirkliche (positive ganze) Zahl, und gibt es weder eine ganze noch eine, in endlichen Zahlen ausgedrückte gebrochene Zahl, welche unter $\sqrt[b]{a}$ verstanden werden müßte, d. h. welche mit b potenzirt, genau a geben könnte, so lassen sich doch ohne Ende fort Paare von gebrochenen Zahlen finden, welche in immer größern und größern Zahlen ausgedrückt erscheinen und von denen jedes einzelne folgende Paar unter sich immer weniger verschieden ist, als die Differenz des nächst vorhergehenden Paares beträgt, wo ferner die Differenzen zwischen einem der folgenden Paare kleiner werden können, als jede noch so klein gegebene Zahl, und wo jedes Paar die Eigenschaft hat,

daß die eine mit b potenzirt, weniger gibt als a, die andere dagegen, wenn sie mit b potenzirt wird, mehr gibt als a.

Beweis. Denn man denke sich eine beliebige wirkliche Zahl n, so ist $a = \frac{a \cdot n^b}{n^b}$. Nun gibt es auf jeden Fall (nach §. 66.) zwei zunächst auf einander folgende positive ganze Zahlen, wovon die eine durch w_n bezeichnet sein mag, so daß

$$(w_n)^b < a \cdot n^b \quad \text{und} \quad (w_n + 1)^b > a \cdot n^b.$$

Dann ist (nach §. 46. N. 5. und §. 65. N. 4.)

$$\left(\frac{w_n}{n}\right)^b < a \quad \text{und} \quad \left(\frac{w_n + 1}{n}\right)^b > a.$$

Die Brüche $\frac{w_n}{n}$ so wie $\frac{w_n + 1}{n}$ bilden also ein Paar solcher gebrochenen Zahlen; die kleinere $\frac{w_n}{n}$ mit b potenzirt, gibt weniger wie a, die größere $\frac{w_n + 1}{n}$ mit b potenzirt, gibt mehr als a; und die Differenz zwischen beiden ist

$$\frac{w_n + 1}{n} - \frac{w_n}{n} \quad \text{d. h.} \quad \frac{1}{n}.$$

Nun denke man sich nach und nach statt n alle ganzen Zahlen gesetzt, von der 2 ab bis in's Unendliche, so stellen obige gebrochene Zahlen $\frac{w_n}{n}$ und $\frac{w_n + 1}{n}$, unendlich viele solcher Paare von Zahlen vor, in immer größern und größern Zahlen ausgedrückt, und deren Differenz $\frac{1}{n}$ immer kleiner wird, je größer n ist; so daß diese Differenz kleiner werden kann, als jede noch so kleine, aber bestimmt gegebene Zahl.

§. 74.

In Bezug auf vorstehenden Lehrsatz existirt also, welche absolute ganze oder gebrochene Zahl a vorstellen mag, doch immer

in der Idee eine gebrochene Zahl, deren Zähler und Nenner aber nie angebbar sind (weil beide unendlich groß gedacht werden müssen) und welche durch $\sqrt[b]{a}$ vorgestellt ist, d. h. welcher die Eigenschaft zukommt, daß wenn man solche mit b potenzirt denkt, dann a herauskommt. — Diese nur in der Idee lebende, der Wurzel $\sqrt[b]{a}$ gleiche, gebrochene Zahl heißt eine irrationale Wurzel; und jede auf ähnliche Weise nur in der Idee existirende, und, weil sie einen unendlich großen Zähler und Nenner hat, nie angebbare gebrochene Zahl, heißt überhaupt eine irrationale Zahl. — Die ganzen Zahlen oder die, in endlichem Zähler und Nenner ausgedrückten gebrochenen Zahlen heißen dagegen rationale.

Man denkt sich also unter $\sqrt[b]{a}$, wenn sie irrational ist, immer die irrationale Zahl selbst, als eine in der Idee existirende, in der Wirklichkeit aber nicht herstellbare gebrochene Zahl, welche $\sqrt[b]{a}$ genau gleich ist*).

§. 75.

Es hat demnach die absolute Wurzel allemal einen bestimmten, aber auch nur einen einzigen Werth.

Und eben deswegen gilt auch noch der Satz, daß „Gleiches

---

*) In der Anwendung dagegen setzt man statt $\sqrt[b]{a}$ einen der unendlich vielen kleinern oder größern Näherungswerthe

$$\frac{w_n}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{w_n+1}{n},$$

welche unter sich um $\frac{1}{n}$, also von $\sqrt[b]{a}$ selbst um weniger als $\frac{1}{n}$ verschieden sind, welche also der $\sqrt[b]{a}$ desto näher kommen, je größer n genommen wird, weil in den Anwendungen zur Vergleichung der Größen, wie wir in der allgemeinen Größenlehre sehen werden, die gebrochene benannte Zahl einen desto unbedeutenderen Theil der Einheit vorstellt, je kleiner (im Sinne des §. 45.) die gebrochene unbenannte Zahl ist.

durch Gleiches radizirt auch dann noch gleiche Resultate liefert, wenn die entstehenden Wurzeln solche im §. 71. definirte absolute Wurzeln sind.

Dabei ist zugleich

1) $(\sqrt[b]{a})^b = a$, 2) $\sqrt[b]{(a^b)} = a$,

3) $\sqrt[b]{1} = 1$, 4) $\sqrt[b]{0} = 0$,

wenn nur b eine ganze positive Zahl, und a eine absolute (positive ganze oder gebrochene) Zahl ist.

§. 76.

Sind a und b absolute ganze oder gebrochene Zahlen, und ist überdieß $a > b$, so ist auch $\sqrt[c]{a} > \sqrt[c]{b}$.

Denn wäre $\sqrt[c]{a} \overline{\overline{<}} \sqrt[c]{b}$,

so wäre auch $(\sqrt[c]{a})^c \overline{\overline{<}} (\sqrt[c]{b})^c$ (nach §. 66. N. 6.)

d. h. $a \overline{\overline{<}} b$.

Ist also p eine absolute Zahl, so ist auch

$$\sqrt[c]{p} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} \sqrt[c]{1}, \quad \text{d. h.} \quad \sqrt[c]{p} \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 1,$$

je nachdem $p \begin{matrix}>\\=\\<\end{matrix} 1$ ist.

§. 77.

Ist man über die Bedeutung der absoluten Wurzel im Reinen, so entsteht die andere Frage: ob alle die Sätze der Wurzeln, namentlich die Formeln VI.—XII. des §. 15. noch gelten, wenn die Wurzeln absolute Wurzeln, und die Potenzen Differenz-Potenzen sind. — Und da findet man, dieselben dort angedeuteten Beweise ausführend, daß sie allerdings gelten, so lange nur die Wurzeln und die Potenzen, die in dem vorhergehenden festgestellte Bedeutung haben. —

Namentlich gilt also die Formel

1) $$a^{\frac{b}{c}} = \sqrt[c]{(a^b)}$$

(vorläufig) nur dann, wenn $\frac{b}{c}$ eine (positive oder negative) ganze Zahl oder Null ist, während c eine positive ganze Zahl, a dagegen eine absolute (ganze oder gebrochene) Zahl sein muß.

Außerdem aber gelten unbedingt für absolute Wurzeln die Formeln:

2) $$\sqrt[m]{(ab)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b};$$ 3) $$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

4) $$\sqrt[m]{(a^n)} = (\sqrt[m]{a})^n;$$ 5) $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a};$$

6) $$\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[mp]{(a^{np})} = \sqrt[m:p]{(a^{n:p})},$$

wenn m:p und n:p absolute ganze Zahlen sind; endlich

7) $$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n \cdot b)}$$ und 8) $$\frac{\sqrt[n]{b}}{a} = \sqrt[n]{\left(\frac{b}{a^n}\right)}.$$

(Es sind aber alle Radikanden positiv ganz oder gebrochen (oder Null), alle Wurzel-Exponenten positiv ganz, alle Potenz-Exponenten positiv oder negativ ganz oder Null, alle Wurzeln aber im Sinne des §. 71. als absolute Wurzeln, d. h. (eindeutig und) positiv gedacht, übrigens ganz oder gebrochen, rational oder irrational.

Fünftes Kapitel.

Anwendung der bisher entwickelten allgemeinen Gesetze der Zahlen-Verbindungen zur Auffindung der Regeln für das (gemeine) Ziffern-Rechnen.

Vorerinnerung.

Die bisherigen Lehren sind entwickelt worden ohne irgend etwas aus der gemeinen Rechenkunst dazu nöthig zu haben. Im Gegentheil beruhen die Regeln der gemeinen Rechenkunst gerade erst auf diesen allgemeinen Gesetzen der Zahlen-Verbindungen und müssen aus ihnen nun abgeleitet werden. Es enthält daher dieses Kapitel die Spezies des gemeinen Ziffernrechnens. Da hier materiell nichts neues entwickelt, sondern nur der wissenschaftliche Zusammenhang des gemeinen Rechnens mit dem ganzen Gebiete der Zahlenlehre nachgewiesen werden soll, so hat man sich so kurz wie nur immer möglich zu fassen gesucht.

Erste Abtheilung.

Zahlensysteme. Das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren, Dividiren, Potenziren, Radiciren ganzer numerischer Zahlen.

§. 78. Lehrsatz.

Wenn z eine beliebige ganze Zahl vorstellt, und α, β, γ, δ, ε, 2c. 2c. alle beliebigen der, zwischen 1 und z liegenden ganzen Zahlen, oder 1 selbst oder auch die (§. 23.) definirte (Null) 0 bezeichnen, so läßt sich jede bestimmte Zahl N (z. B. die Zahl der Scheffel in einem vor uns liegenden größern oder kleinern Haufen Getreide) allemal durch eine Summe von der Form

$$\alpha+\beta\cdot z+\gamma\cdot z^2+\delta\cdot z^3+\varepsilon\cdot z^4+ \text{ꝛc. ꝛc.} \cdots +\mu\cdot z^m$$

ausdrücken, oder es ist allemal, wenn man diese Summe in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$N=\mu\cdot z^m+\cdots+\varepsilon\cdot z^4+\delta\cdot z^3+\gamma\cdot z^2+\beta\cdot z+\alpha.$$

Beweis. Denn jede Zahl ist entweder ein Vielfaches von z oder läßt durch z dividirt, einen Rest, der kleiner ist als z. In beiden Fällen hat sie also die Form

1) $N=az+\alpha$,

nur daß im erstern Fall α Null, im andern Fall α eine der Zahlen vorstellt, welche kleiner als z sind. Aber aus demselben Grunde ist wiederum

2) $a=bz+\beta$, 3) $b=cz+\gamma$, 4) $c=dz+\delta$

u. s. w. f.; also

$$N=az+\alpha=bz^2+\beta z+\alpha=cz^3+\gamma z^2+\beta z+\alpha$$
$$=dz^4+\delta z^3+\gamma z^2+\beta z+\alpha= \text{ꝛc. ꝛc. ꝛc.}$$

Und da die Zahlen a, b, c, d, ꝛc. die nächst kleinsten Quotienten von $\frac{N}{z}$, $\frac{a}{z}$, $\frac{b}{z}$, $\frac{c}{z}$, ꝛc. ꝛc. sind, so werden sie nothwendig immer kleiner und kleiner, so daß zuletzt eine darunter auch $<z$ werden muß, welche nachgehends durch μ vorgestellt sein kann.

§. 79. Zusatz.

Wenn man alle Zahlen der Zahlenreihe auf diese Weise in eine nach demselben Gesetze gebildete Summe, welche letztere eine numerische Zahl genannt werden kann, verwandelt sich denkt, so bilden diese Zeichen das, was man ein Zahlensystem nennt. Dieses Zahlensystem heißt das dyadische, tetradische, dekadische, dodekadische, u. s. f.; je nachdem z die Zahl zwei oder vier, oder zehn oder zwölf, oder ꝛc. vorstellt. Die der Zahl z vorhergehenden Zahlen, werden durch feststehende auf die Folge der Zahlen sich beziehende Zeichen, Ziffern ge-

nannt, bezeichnet, und in dieser Beziehung heißt wohl auch die 0 (Null), wie solche (§. 23.) definirt worden ist, eine Ziffer, weil sie hier wie eine Ziffer in Anwendung kommt.

§. 80.

Man pflegt gewöhnlich dieselbe Summe

$$\mu z^m + \cdots + \varepsilon z^4 + \delta z^3 + \gamma z^2 + \beta z + \alpha$$

bloß so zu schreiben

$$\mu \cdots \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha;$$

und nennt dann die Ziffern α, β, γ, δ, ε, $\cdots$ bezüglich Ziffern der 0ten, 1ten, 2ten, 3ten, 4ten, 2c. Ordnung, um anzudeuten, statt welcher Produkte sie stehen, d. h. mit welchen Potenzen von z sie multiplicirt sind, während alle diese Produkte (Ziffern der verschiedenen Ordnungen) addirt gedacht werden müssen.

§. 81.

Nach dieser Bezeichnungsweise stehet also (§. 24. N. 10. und §. 40. N. 44. so wie §. 39. N. 38.)

10	statt	$1 \cdot z + 0$	d. h. statt	z,
100	statt	$1 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 0$	d. h. statt	z^2 oder 10^2,
1000	statt	$1 \cdot z^3 + 0 \cdot z^2 + 0 \cdot z + 0$	d. h. statt	z^3 oder 10^3.

Eben so ist offenbar

$$100000 = z^5 = 10^5, \qquad 1000000 = z^6 = 10^6,$$

u. s. w. f. und diese Potenzen von z nennt man daher Einheiten der höhern Ordnungen. — Dabei bedeutet z oder 10 jede beliebige ganze (wirkliche) Zahl.

§. 82.

Es ist nun leicht zu sehen, wie zwei solche numerische Zahlen zu oder von einander addirt und subtrahirt werden, so nämlich, daß das unmittelbare Resultat der Addition und Subtrak-

tion jedesmal selber wieder in eine numerische Zahl umgeformt wird, weil man die Ziffern gleichnamiger Ordnungen (nach §. 37. NN. 29. 30. und §. 21. N. 5.) zu einander addiren und von einander subtrahiren kann. — Es ist aber dazu nöthig, daß man je zwei Ziffern α und β addire, d. h. die Summe $\alpha+\beta$ durch Zusammenzählen der Einheiten entweder selbst wieder in eine Ziffer verwandle, wenn $\alpha+\beta<z$, oder in eine Summe von der Form $1 \cdot z+\gamma$ (geschrieben 1γ) wenn $\alpha+\beta>z$ (in so ferne $\alpha+\beta$ jedesmal $<2z$ sein muß). — Geschieht dieses Zusammenzählen je zweier Ziffern ein für allemal, so kann man aus der, von den Resultaten gebildeten Tabelle (das Eins und Eins genannt) oder aus dem Gedächtniß, sowohl das bei dem Addiren, als auch das bei dem Subtrahiren nöthige jedesmal unmittelbar entnehmen.

Eben so findet sich bald die bequemste praktische Form dieser Arbeiten.

§. 83.

Aber eben so einfach findet sich das Multipliciren zweier numerischen Zahlen (aus §. 41. N. 1.), in so ferne das Resultat ebenfalls in eine numerische Zahl umgeformt werden soll.

Man kann aber auch, wenn die numerische Zahl N mit der andern, z. B. mit $\delta z^3+\gamma z^2+\beta z+\alpha$, multiplicirt werden soll, die Formel anwenden, nach welcher man die Zahl N zuerst mit α, dann mit βz (d. h. mit β, und hernach was herauskommt mit z oder 10), ferner mit γz^2 (d. h. mit γ, und was herauskommt, noch mit z^2 oder 100), zuletzt mit δz^3 (d. h. mit δ und mit z^3 oder 1000) multiplicirt und zuletzt alle Resultate addirt. Auf diese Weise bildet sich die bequemste praktische Form dieser Arbeit, die man jedoch auch in umgekehrter Ordnung vornehmen kann, so daß der Multiplikand N zuerst mit δz^3, hernach mit γz^2, dann mit βz und zuletzt mit α multiplicirt wird.

Es ist aber dazu nöthig, daß man die Produkte je zweier Ziffern α und β, welche immer kleiner sind als $z \cdot z$ d. h. kleiner

als z^2 oder 100, welche also allemal die Form $\gamma \cdot z + \delta$ annehmen können, in diese Form verwandle. Dies kann jedoch nur aus der Definition des Produkts $\alpha\beta$ geschehen, nach welcher man α so oft addirt, als β Einheiten hat. — Hat man dies indessen ein für allemal für je zwei Ziffern gethan, so kann man aus der durch die Resultate gebildeten Tabelle (das Ein mal Eins genannt) oder aus dem Gedächtniß, die einzelnen Formen jedesmal unmittelbar entnehmen. — Dabei stellt z oder 10 jede beliebige ganze (wirkliche) Zahl vor.

§. 84.

Das Dividiren zweier numerischen Zahlen durch einander, d. h. die Umformung des unmittelbaren Resultats der Division (d. h. des hingeschriebenen Quotienten) wiederum in eine nach Potenzen von z geordnete Summe, d. h. in eine numerische Zahl, geschieht durch wiederholte Anwendung der Formel der N. 35. des §. 37., nämlich

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A - Bx}{B},$$

wie solche bereits früher (§. 41. N. 3.) angewandt wurde, indem man hier jedesmal zum ersten Summanden x, die höchste Ziffer der höchsten Ordnung nimmt (was nur durch Versuche gefunden werden kann), damit der zweite Summand nur noch Ziffern der niedrigern Ordnungen liefern könne. — Auf diese Weise bilden, wenn man die gehörige Vorsicht anwendet, die nach und nach sich findenden Summanden, zugleich eine numerische Zahl (in so ferne nämlich keine Ordnung fehlt, und die etwa fehlende durch 0 ersetzt wird). — Auf diesem Wege bekommt man auch zugleich die bequemste praktische Form der Division, so wie auch den echten Bruch, welcher noch hinzu addirt werden muß, im Falle die Division zuletzt einen Rest läßt, der nicht Null ist.

§. 85.

Das Potenziren zweier numerischen Zahlen ließe sich höchstens nach der Formel §. 65. N. 1. vereinfachen, kommt aber

zuletzt immer wieder auf den Begriff der Potenz zurück, so daß man eben den Dignanden so oft nimmt, als der Exponent Einheiten hat, und dann alle diese gleichen Zahlen mit einander multiplicirt.

Hätte man eine bloß zweiziffrige Zahl zu potenziren mit 2, 3, 4, 5, rc. rc., so könnte man, da die zweiziffrige Zahl die Form der Summe $a+b$ hat, es versuchen Formeln dafür sich zu bilden, indem man $1\cdot a+1\cdot b$ mit $1\cdot a+1\cdot b$ multiplicirt, das Resultat in $1\cdot a^2+2\cdot ab+1\cdot b^2$ umformt, — dann noch einmal mit $1\cdot a+1\cdot b$ multiplicirt, das Resultat in $1\cdot a^3+3a^2b+3\cdot ab^2+1\cdot b^3$ umformt, — dann mit dem vierten Faktor $1\cdot a+1\cdot b$ multiplicirt, das Resultat in $1\cdot a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1\cdot b^4$ umformt, — und so weiter fortfährt, bis man vielleicht ein Gesetz entdeckt, wonach sich $(a+b)^m$ als ein Produkt von m solchen Faktoren $1\cdot a+1\cdot b$ in einer analogen Entwickelung hinschreiben läßt.

Weil aber, wenn man die Summe

$$1\cdot a^m+m_1\cdot a^{m-1}b+m_2\cdot a^{m-2}b^2+m_3\cdot a^{m-3}b^3+\cdots$$

(wo m_1, m_2, m_3, m_4, $\cdots$ völlig unbekannte, von der Zahl m abhängige Koeffizienten vorstellen) mit $1\cdot a+1\cdot b$ multipliciren soll, man zuerst jedes Glied derselben mit $1\cdot a$, dann noch jedes Glied derselben mit $1\cdot b$ multipliciren kann, wenn man nur zuletzt alles addirt, so geschieht diese Umformung am bequemsten nach folgendem Schema, nämlich:

A. $1\cdot a^m+m_1a^{m-1}b+m_2a^{m-2}b^2+m_3a^{m-3}b^3+m_4a^{m-4}b^4+\cdots$
multiplicirt mit $1\cdot a+1\cdot b$

$$\begin{array}{l} 1\cdot a^{m+1}+m_1a^mb+m_2a^{m-1}b^2+m_3a^{m-2}b^3+m_4a^{m-3}b^4+\cdots \\ \qquad +1a^mb+m_1a^{m-1}b^2+m_2a^{m-2}b^3+m_3a^{m-3}b^4+\cdots \end{array}$$

B. $1\cdot a^{m+1}+(m_1+1)a^mb+(m_2+m_1)a^{m-1}b^2+(m_3+m_2)a^{m-2}b^3$
$+(m_4+m_3)a^{m-3}b^4+\cdots$.

War aber der Ausdruck in A.) der m^{ten} Potenz von $a+b$ gleich, so drückt der Ausdruck B.) die nächstfolgende $(m+1)^{te}$ Potenz von $a+b$ aus. Man bemerkt also leicht, daß in letzterer jeder

Koeffizient die Summe aus zwei nächst auf einander folgenden Koeffizienten der ersteren ist.

Nach diesem Gesetz kann man nun leicht und ohne Weiteres folgende Resultate hinschreiben

1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$;

2) $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

3) $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$;

4) $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$;

u. s. w. f.

Diese Formeln ließen sich auch zur Umformung der ganzen Potenzen von drei- und mehrziffrigen ganzen Zahlen anwenden, weil jede dreiziffrige Zahl z. B. $\gamma\beta\alpha$ als die Summe aus $\gamma\beta\cdot z+\alpha$ (z. B. 389 als die Summe $38\cdot10+9$) angesehen werden kann und das analoge von jeder mehrziffrigen Zahl auch noch gilt.

Alle diese Formeln gewähren jedoch für den Zweck des numerischen Potenzirens keine wesentlichen Vortheile, wenn sie auch, wie der nächste §. 86. zeigt, zum numerischen Radiziren benutzt werden können.

§. 86.

Das Radiziren zweier numerischen Zahlen durch einander im Sinne des praktischen Rechnens, d. h. das Umformen einer Wurzel in eine numerische Zahl wird so mühsam, daß man sich in den Elementen auf das Radiziren einer beliebig gegebenen Zahl durch die einfachsten Zahlen 2, 3, 4, ··· beschränkt, und dieses Geschäft das Quadrat-, Kubik-, Biquadrat- 2c. Wurzel-Ausziehen nennt.

1) Um eine Idee dieses Wurzel-Ausziehens zu geben, sei 7943 durch 2 zu radiziren. Da $10^2 = 100$ und $100^2 = 10000$ ist, so liegt die gesuchte Wurzel zwischen 10 und 100, ist also zweiziffrig und hat die Form $\alpha\cdot10+\beta$, wo α und β Ziffern sind. Soll aber

$\sqrt[2]{(7943)} = \alpha\cdot 10 + \beta$ sein, so muß

$$7943 = (\alpha\cdot 10 + \beta)^2 = \alpha^2\cdot 100 + 2\alpha\beta\cdot 10 + \beta^2$$

werden (nach §. 85. N. 1.). Weil jedoch

$$7943 = 79\cdot 100 + 4\cdot 10 + 3$$

ist, so wird α^2 nahehin 79, also wenn wir annehmen, daß z oder 10 die Zahl zehn vorstellt, $\alpha = 8$ sein müssen. Dann ist $\alpha^2 = 64$, und $\alpha^2\cdot 100$ auf beiden Seiten der obigen Gleichung subtrahirt, läßt $1543 = 2\alpha\beta\cdot 10 + \beta^2$;

d. h. $$154\cdot 10 + 3 = 2\cdot 8\cdot \beta\cdot 10 + \beta^2;$$

und es muß also $2\cdot 8\cdot \beta$ d. h. 16β nahehin 154 werden, also β nahehin $\frac{154}{16}$ d. h. nahehin 9. Dann ist aber

$$2\alpha\beta\cdot 10 = 16\cdot 9\cdot 10 = 1440 \quad \text{und} \quad \beta^2 = 81;$$

demnach $2\alpha\beta\cdot 10 + \beta^2 = 1521$, so daß die gegebene Zahl 7943 um 22 zu groß ist, wenn 89 die Quadratwurzel sein soll. Es ist also 89 die nächstkleinste und 90 die nächstgrößte Quadratwurzel von 7943 (unter der Voraussetzung jedoch, daß z oder 10 die Zahl zehn vorstellt, weil sonst nicht $8^2 = 64$ *) wäre und auch die übrigen Rechnungen anders ausfallen würden).

2) Wäre die Quadratwurzel aus einer größern Zahl z. B. aus 197581 gesucht, so würde man zwar wissen, daß selbige zwischen 100 und 1000 liegt, also 3 ziffrig ist; dagegen sie doch in der Form $\alpha\cdot 10 + \beta$ hinstellen können, nur daß α selbst eine zweiziffrige Zahl wäre. Dann wäre α^2 nahehin 1975, also, um α zu finden, aus 1975 die nächstkleinste Quadrat-Wurzel zu ziehen. Ist solches genau nach dem vorhergehenden Beispiel (N. 1.) geschehen und $\alpha = 44$ gefunden worden, so findet man dann sogleich, wie im vorhergehenden Beispiele schließend, die andere Ziffer β dazu.

So ergibt sich leicht das praktische Verfahren, um aus beliebig vielziffrigen Zahlen die nächstkleinste Quadrat-Wurzel zu finden, so wie auch die praktische Form dieses Verfahrens.

*) Z. B. für $z = 9$, würde $8^2 = 71$ sein.

3) Sollte aus 197581 die Kubikwurzel gezogen werden, so wüßte man wieder, weil $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$ ist, daß die Wurzel zweiziffrig und also von der Form $\alpha \cdot 10 + \beta$ ist. Soll aber

$$\sqrt[3]{197581} = \alpha \cdot 10 + \beta \quad \text{werden, so muß}$$
$$197581 = (\alpha \cdot 10 + \beta)^3 \quad \text{sein.}$$

Nun ist aber (nach §. 85. N. 2.)

$$(\alpha \cdot 10 + \beta)^3 = \alpha^3 \cdot 1000 + 3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3,$$

und $\quad 197581 = 197 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1,$

und es muß also α^3 nahehin 197, demnach unter der Voraussetzung, daß z oder 10 die Zahl zehn vorstellt, $\alpha = 5$ sein, weil $6^3 = 216$ schon zu viel ist. Subtrahirt man nun $\alpha^3 \cdot 1000$ d. h. 125000 auf beiden Seiten der obigen Gleichung, so erhält man

$$72581 = 3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3;$$

aber $\quad 72581 = 725 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 1,$

so daß $3\alpha^2 \cdot \beta$ nahehin 725, d. h. β nahehin $\frac{725}{3\alpha^2}$ oder $\frac{725}{75}$ oder 9 sein wird. Dann ist aber

$$\begin{aligned} 3\alpha^2\beta \cdot 100 &= 67500 \\ 3\alpha\beta^2 \cdot 10 &= 12150 \\ \beta^3 &= 729 \\ \hline 3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3 &= 80379; \end{aligned}$$

und so sieht man, daß 9 statt β anzunehmen nicht erlaubt ist, daß man den Werth von β überschätzt hat, und daß man es demnach mit $\beta = 8$ versuchen müsse. — Für $\beta = 8$ findet sich aber $3\alpha^2\beta \cdot 100 + 3\alpha\beta^2 \cdot 10 + \beta^3 = 70112$; und es ist also 58 die nächstkleinste, 59 dagegen die nächstgrößte Kubikwurzel aus 197581.

4) Sollte aus einer noch viel größern Zahl die Kubikwurzel gezogen werden, z. B. aus 98729086, so würde man die Wurzel

wieder $=\alpha\cdot 10+\beta$ setzen, aber α als eine zweiziffrige Zahl ansehen. Dann wäre α^3 nahehin 98729, also α zu finden, wenn man aus 98729 die nächstkleinste Kubikwurzel zieht, was nach N. 3. geschehen kann. — Ist aber α gefunden, so findet man genau wie in N. 3. verfahrend, β sogleich dazu.

Auf diese Weise findet man die nächstkleinste Kubikwurzel einer jeden noch so großen Zahl, immer das Verfahren N. 3. wiederholend. Und dann gibt sich auch bald die bequemste praktische Form dieses Geschäfts.

5) Auf dieselbe Weise läßt sich auch jede höhere Wurzel ausziehen, nur daß die Mühseligkeiten der Arbeit mit jedem größern Wurzel-Exponenten unverhältnißmäßig größer werden. — Deshalb ist es gut, daß wir später noch ganz andere Mittel angeben können, welche diese lästigen Arbeiten überflüssig machen.

§. 87.

Aus einem Bruche wird die Wurzel gezogen, wenn man sie aus Zähler und Nenner zieht (nach §. 77. N. 3.). In der Praxis wird man aber vorher den Bruch (dadurch daß man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl zugleich multiplicirt) so umformen, daß aus dem Nenner sich die Wurzel genau ziehen läßt.

Z. B. Statt $\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$ setze man $\sqrt[2]{\frac{2}{4}}$ d. h. $\frac{\sqrt[2]{2}}{2}$; d. h. $\frac{1}{2}\sqrt[2]{2}$. —

Eben so ist $\sqrt[2]{\frac{5}{12}}=\sqrt[2]{\frac{15}{36}}=\frac{\sqrt[2]{15}}{6}=\frac{1}{6}\sqrt[2]{15}$.

Ferner ist $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{6}{8}}=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$; u. s. f.

§. 88.

Wollte man die Quadrat- oder die Kubik- oder irgend eine höhere Wurzel näherungsweise ausziehen, d. h. eine gebrochene Zahl finden, welche von der gegebenen $\sqrt{a}$ oder $\sqrt[3]{a}$, oder

$\sqrt[n]{a}$ um weniger als eine beliebig klein gegebene positive (gebrochene) Zahl verschieden ist, so würde man nach der Anleitung des §. 73. verfahren müssen, statt der dortigen Zahl n aber lieber 10, 100, 1000, oder irgend eine ganze Potenz von 10 nehmen, weil die dadurch entstehenden Brüche für die Ziffernrechnung die bequemsten sind.

Zweite Abtheilung.

Von den systematischen Brüchen.

§. 89. Erklärung.

Jeder Bruch, dessen Nenner 10 oder eine der Potenzen von 10 ist, z. B. 100, 1000, 10000, u. s. w. heiße ein systematischer Bruch. — Solchen schreibt man kürzer dadurch, daß man bloß den Zähler schreibt, und an selbigem, von der Rechten zur Linken gehend, so viele Stellen durch ein Komma absondert, als der zugehörige Nenner Nullen hat.

So schreibt man z. B.

$3{,}7$ statt $\frac{37}{10}$ oder $3+\frac{7}{10}$

$0{,}37$ statt $\frac{37}{100}$

$0{,}0037$ statt $\frac{37}{10000}$

$14{,}00607$ statt $\frac{1400607}{100000}$ d. h. statt $14\frac{607}{100000}$.

§. 90.

In einem systematischen Bruche hat man also den Zähler, wenn man das Komma gar nicht berücksichtigt, den Nenner dagegen, wenn man neben 1 so viel Nullen setzt, als rechts vom Komma noch Stellen sind.

Diese rechts vom Komma stehenden Stellen nennt man die gebrochenen Stellen, die links vom Komma stehenden, die ganzen Stellen.

§. 91.

1) Weil z. B.

$$\frac{1472965}{100000} = \frac{1 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 5}{10^5}$$

$$= 1 \cdot 10 + 4 + \frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{5}{100000}$$

ist, so kann man den systematischen Bruch 14, 72965 auch als die hier stehende Summe sich denken.

2) Am weitesten zur Rechten eines systematischen Bruches kann man Nullen anhängen und weglassen, so viel man deren will, und der systematische Bruch bleibt am Werthe unverändert.

So ist z. B.

$$3{,}7 = \frac{37}{10} = \frac{37000}{10000} = 3{,}7000;$$

$$0{,}07600 = \frac{7600}{100000} = \frac{76}{1000} = 0{,}076;$$

denn es bleibt ein Bruch unverändert, wenn man Zähler und Nenner zugleich mit 1000, 100, 2c. 2c. multiplicirt oder dividirt.

3) Systematische Brüche werden daher unter einerlei Benennung gebracht, d. h. in andere gleiche systematische Brüche verwandelt, welche alle einen und denselben Nenner haben, wenn man rechts Nullen anhängt, bis alle Brüche eine gleiche Anzahl gebrochener Stellen haben.

So z. B. schreibt man

	0,03		0,03000
statt	1,6078	die gleichen	1,60780
der	14,00068	Brüche	14,00068
Brüche	15,4		15,40000
	0,704		0,70400

und alle diese neuen Brüche haben einerlei Nenner.

§. 92.

Systematische Brüche werden zu einander addirt, von ein-

ander subtrahirt, mit einander multiplicirt und durch einander dividirt, wie gewöhnliche Brüche, also nach den Formeln

$$\text{I.}\quad \frac{a}{10^c} \pm \frac{b}{10^c} = \frac{a \pm b}{10^c};\qquad \text{II.}\quad \frac{a}{10^b} \cdot \frac{c}{10^d} = \frac{a \cdot c}{10^{b+d}};$$

$$\text{III.}\quad \frac{a}{10^b} : \frac{c}{10^d} = \frac{a:c}{10^{b-d}},$$

nur daß man immer den Nenner nicht schreibt, sondern bloß dazu denkt, und dabei dafür sorgt, daß das Resultat sogleich wieder ein systematischer Bruch wird.

1) Bei dem Addiren und Subtrahiren hat man also nur die Brüche (nach §. 91. N. 3.) unter einerlei Benennung zu bringen, die Zähler zu addiren, und den Nenner zu lassen (d. h. das Komma in die ebensovielte Stelle von der Rechten zur Linken zu setzen).

2) Bei dem Multipliciren zweier systematischen Brüche, multiplicirt man also die ganzen Zahlen, welche die Zähler bilden, und hat zum Nenner so viele (nämlich b+d) Nullen, als beide Faktoren deren im Nenner zusammengenommen haben. Also bekommt der Zähler ein Komma um so viele Stellen von der Rechten zur Linken stehend, als beide Faktoren zusammen, gebrochene Stellen haben.

3) Bei dem Dividiren zweier systematischen Brüche, dividirt man, obiger Formel III. gemäß, die ganzen Zahlen, welche die Zähler bilden durch einander, dies gibt den neuen Zähler; und der Nenner hat b—d Nullen, wenn der Nenner des Dividenden deren b, und der Nenner des Divisors d Nullen hatte. Also bekommt der Quotient im Zähler so viele gebrochene Stellen, als deren der Dividend hat, weniger der Anzahl derer, welche der Divisor hat.

Es ist aber dabei zu bemerken:

A. Hat der Dividend nicht mehr gebrochene Stellen als der Divisor, so gebe man ihm durch Anhängen von Nullen (nach §. 91. N. 2.) so viele als er haben soll.

B. Geht die Division der Zähler a und c nicht ohne Rest auf, sondern bleibt noch ein Rest n, so findet sich $a:c = m + \frac{n}{c}$, wo $\frac{n}{c} < 1$ ist; und dann ist der wahre Quotient der Brüche $\frac{a}{10^b}$ und $\frac{c}{10^d}$, offenbar $\frac{m}{10^{b-d}} + \frac{\left(\frac{n}{c}\right)}{10^{b-d}}$. — Nimmt man also den systematischen Bruch $\frac{m}{10^{b-d}}$ für den wahren Quotienten, so hat man um $\frac{\left(\frac{n}{c}\right)}{10^{b-d}}$ zu wenig; also fehlt man um weniger als $\frac{1}{10^{b-d}}$. — Sorgt man indessen (nach A.) dafür, daß die Anzahl b der gebrochenen Stellen des Dividenden, also auch $b-d$ und mithin 10^{b-d} groß genug wird, so kann man die Näherung treiben, so weit man nur immer will, und sich so in jedem Falle der Anwendung auf die „Größenlehre", mit dem bloßen systematischen Bruche $\frac{m}{10^{b-d}}$ begnügen.

§. 93.

Soll aus einem systematischen Bruche $\frac{a}{10^b}$ die Quadrat-, die Kubik-, oder irgend eine höhere Wurzel z. B. die n^{te} Wurzel gezogen werden, so darf man nur Zähler und Nenner mit 10^d multipliciren (d. h. am weitesten zur Rechten d Nullen anhängen) die Zahl d aber so wählen, daß $b+d$ ein Vielfaches von n, z. B. $b+d = mn$ wird.

Denn dann hat man

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{10^b}\right)} = \sqrt[n]{\left(\frac{a \cdot 10^d}{10^{mn}}\right)} = \frac{\sqrt[n]{(a \cdot 10^d)}}{10^m},$$

weil $\sqrt[n]{(10^{mn})} = 10^m$ ist (nach §. 77. N. 1.).

Man zieht dann aus dem neuen Zähler $a \cdot 10^d$ die nächstkleinste n^{te} Wurzel, und gibt dieser Zahl, m gebrochene Stellen durch das Setzen des Komma, so hat man einen Näherungswerth, welcher von dem wahren um weniger als $\frac{1}{10^m}$ verschieden ist, während d, folglich auch m, so groß, also $\frac{1}{10^m}$ so klein werden kann, als man nur immer will, und als man in den einzelnen Fällen der Anwendung zur Vergleichung der Größen es bedarf.

Dritte Abtheilung.

Dekadisches Zahlensystem. Decimalbrüche.

§. 94. Erklärung.

Bisher ist von keinem bestimmten Zahlensystem die Rede gewesen, und alles in den vorhergehenden Blättern gesagte bezieht sich auf jedes beliebige System, weil 10 nicht Zehn, sondern $1 \cdot z + 0$ d. h. z bedeutete, so wie 100 nicht die Bedeutung zehn mal zehn, sondern die Bedeutung $z \cdot z$ oder z^2 hatte, während z jede beliebige ganze Zahl, also z. B. auch zwölf bedeuten konnte.

Gewöhnlich bedienen wir uns aber des dekadischen Zahlen-Systems, in welchem die Zahl z zehn ist. Die Zeichen 10, 100, 1000, 10000, 1000000 ꝛc. ꝛc. bedeuten dann die verschiedenen ganzen Potenzen von zehn, die wir noch mit den besondern Namen (in so ferne die Sprache nach dem dekadischen System gebildet ist)

zehn, hundert, tausend, zehntausend,
hunderttausend, Million, ꝛc. ꝛc. belegen.

In diesem Falle braucht man nur diejenigen Zahlen, welche

der zehn vorangehen durch Ziffern zu bezeichnen, so daß man jetzt gerade die Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

gebraucht, nicht mehr und nicht weniger.

Der zu diesem dekadischen Zahlensystem gehörige systematische Bruch heißt dann Decimalbruch; seine gebrochene Stellen, Decimalstellen, auch wohl Decimalen.

Sechstes Kapitel.

Praktische Regeln der Ziffern- und der Buchstaben-Rechenkunst.

Vorerinnerung.

In so ferne es nicht allein nöthig ist, die Lehrsätze der Zahlenlehre zu wissen, sondern sie auch anwenden zu können, mögen hier die gewöhnlichsten Anwendungen der bisher vorgetragenen Theorie Platz finden. Weil aber hier keine neuen Lehrsätze vorgetragen, sondern die schon vorgetragenen nur in Anwendung gebracht werden, dieses ganze Kapitel also eigentlich gar nicht zur Theorie gehört, sondern hier nur der Praxis wegen seinen Platz findet, so werde die Folge der Paragraphen hier unterbrochen, und diese praktischen Methoden und Regeln als Einschaltungen bloß mit fortlaufenden Nummern bezeichnet.

Erste Abtheilung.

Praktische Methoden, die numerische Bestimmung der Ausdrücke betreffend.

1.

Sollen gegebene ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen*) numerisch addirt, subtrahirt, multiplicirt, oder dividirt, und die Resultate dann (in so ferne sie wieder ganze, gebrochene oder gemischte Zahlen sind) auf's Neue durch ähnliche numerische Ope-

*) Unter gemischter Zahl versteht man eine Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche.

rationen *) mit einander verbunden werden, so ist es, wenn man bloß das numerische Endresultat haben will, in den meisten Fällen vortheilhafter, die numerischen Bestimmungen nicht so einzeln und in der Reihe, wie sie der gegebene Ausdruck verlangt, stattfinden zu lassen, sondern den gegebenen Ausdruck erst in einen andern ihm gleichen zu verwandeln, in welchem letztern aber die Zahl der Operationen höchst möglich verringert ist, oder sie selbst doch in bequemer umzuformende verwandelt sind; dann aber diesen neuen Ausdruck erst numerisch zu bestimmen.

Als besonders wichtig und vortheilhaft hebe man den Fall heraus, in welchem ein Quotient numerisch bestimmt werden soll, dessen Dividend und Divisor Produkte ganzer Zahlen sind; z. B. der Quotient

$$\frac{8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 20}{10 \cdot 18 \cdot 24}$$

Man bemerke:

α) Kommen in beiden Produkten gemeinschaftliche Faktoren vor, so lasse man diese oben und unten weg; setze z. B. statt

$$\frac{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{20 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 15} \text{ bloß } \frac{12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 5}{20 \cdot 15};$$

nach (§. 37. N. 28.).

β) Kommen keine gemeinschaftlichen Faktoren mehr vor, so versuche man, einen Faktor des Zählers und einen Faktor des Nenners durch ein gemeinschaftliches Gemäß zu dividiren (und

---

*) Unter „numerischem Operiren" verstehen wir hier jedesmal das Umformen der angezeigten Operationen (also, im Sinne der §§. 18. 19. 33. und 34. der wirklichen Operations-Resultate) wiederum in numerische Zahlen, d. h. in Summen, die nach Potenzen von 10 (d. h. nach Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern, u. s. w.) geordnet sind, wobei wir nur noch bemerken, daß diese numerischen Zahlen, d. h. diese letzterwähnten Summen, wiederum nur Ausdrücke, d. h. angezeigte Operationen, aber von bestimmt vorgeschriebener Form sind, und wirkliche (ganze) Zahlen bezeichnen.

zwar durch das größte) und so oft dies angeht; und setze die numerischen Quotienten statt der Faktoren selbst in die Produkte hin. —

Statt obiger Quotienten z. B. erhält man jetzt:

$$\frac{12 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1}{20 \cdot 3}, \quad \text{dann} \quad \frac{3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 1}{5 \cdot 3}, \quad \text{dann (nach } \alpha) \quad \frac{2 \cdot 8 \cdot 1}{5};$$

(§. 37. N. 25. und N. 28.).

γ) Kann man aber weder β) noch α) mehr in Anwendung bringen, so fange man an, den Ausdruck selbst, so wie es die Bezeichnung verlangt, numerisch zu bestimmen. Und man erhält statt des obigen Quotienten, jetzt:

$\frac{16}{5}$ oder $3\frac{1}{5}$ (eigentlich $3+\frac{1}{5}$).

Anmerkg. 1. Wegen $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ kann man die Faktoren, welche 1 sind, ohne weiteres weglassen.

Anmerkg. 2. Auch findet das Gesagte noch statt, wenn der Dividend oder der Divisor an sich schon eine numerische ganze Zahl sein sollte.

Bei dem numerischen Multipliciren und Dividiren der Brüche kann Vorstehendes besonders vortheilhaft in Anwendung gebracht werden, da die Produkte und die Quotienten zweier Brüche immer auf solche Quotienten führen (§. 37. oder §. 38. NN. 36. 37.).

2.

Bei dem Arbeiten mit Brüchen muß man besonders das Aufheben derselben nicht außer Acht lassen, welches darin besteht, daß man Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl dividirt, und zwar wo möglich durch das größte gemeinschaftliche Gemäß derselben, damit alle Brüche, so wie sie entstehen, sogleich in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt seien (§§. 62. u. 63.).

3.

Bei dem Addiren und Subtrahiren mehrerer Brüche oder Quotienten, muß man zuvor jeden der gegebenen Brüche in

einen andern ihm gleichen verwandeln, so aber, daß alle neuen Brüche (Quotienten) einerlei Nenner (Divisor) haben, d. h. „man muß sie unter gleiche Benennung bringen.“ — Jeder neue Bruch (Quotient) entsteht aber aus dem gegebenen, dem der neue gleich werden soll, nur dadurch, daß man Zähler und Nenner (oder Dividend und Divisor) mit einem und demselben Ausdruck multiplicirt oder dividirt. — Um nun diesen letztern Ausdruck für jeden einzelnen der gegebenen Brüche zu finden, verfährt man wie folgt:

Man nimmt für alle Brüche (Quotienten) einen beliebigen gemeinschaftlichen Divisor N an, und wenn dann z. B. $\frac{\alpha}{a}$ in einen neuen Quotienten verwandelt werden soll, dessen Divisor N ist, so dividirt man zuerst N durch den Nenner a, und wenn a_1 der Werth dieses Quotienten $\frac{N}{a}$ (d. h. diesem Quotienten gleich) ist, so multiplicirt man damit Dividend und Divisor von $\frac{\alpha}{a}$, oder vielmehr den Dividenden α allein, weil man im Voraus schon wissen kann, daß der neue Divisor nothwendig N ist.

Sind also

$$\frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta}{b}, \quad \frac{\gamma}{c}, \quad \frac{\delta}{d}, \text{ ꝛc.}$$

die gegebenen Quotienten (Brüche), welche unter einerlei Benennung gebracht werden sollen, so nehme man einen beliebigen Ausdruck N zum gemeinschaftlichen Divisor (Nenner) an, dividire mit den Nennern a, b, c, d, ꝛc. einzeln in N, und multiplicire die zugehörigen Zähler

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta, \text{ ꝛc.}$$

bezüglich mit diesen Quotienten

$$\frac{N}{a}, \quad \frac{N}{b}, \quad \frac{N}{c}, \quad \frac{N}{d}, \text{ ꝛc.,}$$

welche bezüglich durch

$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1, \quad \text{rc.}$$

bezeichnet sein mögen; und die Quotienten (Brüche)

$$\frac{\alpha \cdot a_1}{N}, \quad \frac{\beta \cdot b_1}{N}, \quad \frac{\gamma \cdot c_1}{N}, \quad \frac{\delta \cdot d_1}{N}, \quad \text{rc.}$$

sind die verlangten, d. h. den gegebenen Quotienten bezüglich gleich.

Hat man es aber mit wirklichen Brüchen, d. h. nicht mehr mit allgemeinen Quotienten zu thun, so wird man N so nehmen müssen, daß die Quotienten $\frac{N}{a}$, $\frac{N}{b}$, $\frac{N}{c}$, rc. wirkliche (ganze) Zahlen werden, d. h. N muß ein gemeinschaftliches Vielfaches (§. 57.), der Nenner a, b, c, rc. rc. sein. — Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Nenner a, b, c, rc. rc. ist offenbar die geeignetste Zahl, um sie statt N zu nehmen.

Aber auch bei allgemeinen Quotienten ist im Praktischen statt N das Produkt aller Divisoren, oder doch ein Produkt zu wählen, das jeden einzelnen der gegebenen Divisoren zum Faktor hat.

Auf diesem Wege erhält man sogleich

1) $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd},$$

2) $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},$$

3) $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf-bcf+bde}{bdf},$$

4) $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}+\frac{g}{h}-\frac{m}{n}$$
$$=\frac{adfhn-bcfhn-bdehn+bdfgn-bdfhm}{bdfhn},$$

u. s. w. f.

4.

Haben die einzelnen Divisoren (Nenner) bereits gemeinschaftliche Faktoren, so kann man am bequemsten statt N nehmen

das Produkt der nicht gemeinschaftlichen Faktoren, und der vorher herausgesetzten gemeinschaftlichen Faktoren.

Sind z. B. die einzelnen Divisoren (Nenner)

$$am,\ bn,\ cmn,\ dmmm,\ enn,$$

so nehme man $N = abcdemmmnn$. — Es wird nämlich der gemeinschaftliche Faktor m herausgesetzt aus am, cmn, dmmm, so daß noch bleibt

$$a,\ bn,\ cn,\ dmm,\ enn.$$

Hernach wird noch herausgesetzt der gemeinschaftliche Faktor n aus bn, cn, enn, so daß noch bleibt

$$a,\ b,\ c,\ dmm,\ en.$$

Und nun wird das Produkt der nicht gemeinschaftlichen Faktoren a, b, c, dmm, en, und der herausgesetzten gemeinschaftlichen Faktoren m und n, für N genommen.

So findet sich

$$\frac{a}{bm}+\frac{c}{m}=\frac{a+bc}{bm},$$

$$\frac{a}{bm}-\frac{c}{mn}+\frac{d}{pn}=\frac{apn-bcp+bdm}{bmnp},$$

$$\frac{48}{2\cdot2}-\frac{10}{2}+\frac{54}{2\cdot3}+\frac{32}{2\cdot2\cdot2}-\frac{72}{3\cdot3}$$
$$=\frac{48\cdot2\cdot3\cdot3-10\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3+54\cdot2\cdot2\cdot3+32\cdot3\cdot3-72\cdot2\cdot2\cdot2}{2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3}.$$

5.

Das so eben gezeigte Verfahren, um die Zahl N zu finden, welche bei Brüchen, die unter einerlei Benennung gebracht werden sollen, zum kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (General-Nenner genannt) dienen kann, ist, auf wirkliche Zahlen angewandt, nichts anderes, als das (§. 60. N. 10.) beschriebene Auffinden des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen; und letzteres nimmt sich im Praktischen so aus:

α) Man schreibe die gegebenen Zahlen neben einander hin, gehörig abgesondert, und mache zur Linken einen Vertikalstrich.

β) Man suche die Primzahl, durch welche wenigstens zwei der Zahlen getheilt werden, schreibe sie zur Linken des Striches, und dividire damit jede der durch sie theilbaren Zahlen; die numerischen Quotienten schreibe man an die Stelle der Zahlen selbst.

γ) Dieses Verfahren wiederhole man für die noch übrigen gegebenen Zahlen, und die (nach *β*) statt der andern gesetzten Maaße (Quotienten); und setze dieses so lange fort, als noch Primzahlen gefunden werden, durch welche wenigstens zwei der noch stehenden Zahlen theilbar sind.

δ) Findet man keine dergleichen Primzahl mehr auf, so ist das Produkt aller der zur linken des Vertikalstriches stehenden Primzahlen und der noch rechts unten stehenden Zahlen, das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache der gegebenen Zahlen.

Es sei z. B. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 84, 27, 42, 49, 36, 24 zu finden. — Man erhält das Schema

2	84,	27,	42,	49,	36,	24
2	42,		21,		18,	12
3	21,				9,	6
3	7,	9,	7,		3,	2
7		3,			1,	
	1,		1,	7,		

und das gesuchte kleinste gemeinschaftliche Vielfache ist

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \text{ oder } 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2 \text{ oder } 10584.$$

Anmerkg. 1. Man kann die 1, die sich ergeben, ohne Weiteres weglassen.

Anmerkg. 2. Multiplicirt man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache mit einer beliebigen ganzen Zahl, so hat man ein größeres gemeinschaftliches Vielfache derselben Zahlen.

Anmerkg. 3. Kommen unter den gegebenen Zahlen, oder

unter den im Schema gleichzeitig entstehenden Zahlen, einige vor, die entweder dieselben sind, oder von denen die eine ein Vielfaches der andern ist, so kann man die gleichen Zahlen bis auf eine ohne Weiteres durchstreichen, im andern Falle aber bloß das Vielfache beibehalten und die andern durchstreichen. Immer erhält man doch dasselbe kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

6.

Um denselben Zweck zu erreichen, könnte man auch jede der gegebenen Zahlen in ihre einfachen Faktoren zerlegen, und dann unmittelbar (nach §. 60. N. 10.) verfahren. — Für obiges Beispiel erhielte man:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3, \quad 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$49 = 7 \cdot 7, \quad 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3;$$

und aus diesen einfachen Faktoren das kleinste gemeinschaftliche Vielfache

$$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \times 3 \cdot 3 \times 7 \times 2,$$

wie oben auch.

7.

Dies erfordert aber wieder, daß man die einfachen Faktoren gegebener Zahlen zu finden im Stande sei. — Solches kann inzwischen nur versuchweise geschehen und zwar auf folgende Art (wenn z. B. 84 die gegebene Zahl ist):

α) Man suche die kleinste Primzahl (2), durch welche die gegebene Zahl theilbar ist, durch Versuche, setze sie hin, und dividire damit die gegebene Zahl numerisch (gibt 42).

β) Diesen numerischen Quotienten (42) behandle man auf's Neue, wie die gegebene Zahl selbst, und schreibe die Primzahl, die man hier erhält (2), zu der vorigen hin.

γ) Man fahre so fort, die jedesmaligen numerischen Quotienten auf's Neue so zu behandeln, wie in α) die gegebene Zahl selbst, bis man zuletzt den numerischen Quotienten 1 erhält.

δ) Die neben einander geschriebenen Primzahlen bilden dann die einfachen Faktoren der gegebenen Zahl.

8.

Um einen gegebenen Bruch in seinen kleinsten Zahlen auszudrücken, muß man Zähler und Nenner desselben durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler dividiren. — Es wird aber der größte gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen z. B. 294 und 336 praktisch auf zwei Wegen gefunden. — Der erste davon ist folgender:

α) Man sucht die einfachen Faktoren der beiden gegebenen Zahlen, und erhält:

$$294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7, \quad \text{und} \quad 336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

β) Das Produkt der beiden gegebenen Zahlen gemeinschaftlichen Faktoren, ist dann der gesuchte größte gemeinschaftliche Theiler der fraglichen Zahlen. — Man findet als solchen $2 \cdot 3 \cdot 7$ oder 42 (§. 60.).

9.

Der zweite Weg dagegen ist nachstehender:

α) Man dividirt die größere durch die kleinere der gegebenen Zahlen numerisch. Geht dies ohne Rest an, so ist die kleinere das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß.

β) Im andern Falle (wenn beide Zahlen nicht durch einander theilbar sind) bestimmt man den nächstkleinsten Quotienten und den Rest, und dividirt mit dem Rest in den Divisor numerisch. Ist dies möglich, so ist dieser Rest die gesuchte Zahl.

γ) Im andern Falle aber bestimme man wieder den nächstkleinsten Quotienten und den Rest, und dividire mit diesem Rest in den vorigen Rest numerisch.

δ) Dies Verfahren γ) wiederhole man so lange, bis eine dieser numerischen Divisionen möglich ist (aufgeht), so daß kein Rest mehr bleibt.

ε) Der letzte Rest ist dann das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß der beiden gegebenen Zahlen.

Man erhält folgendes Schema:

$$\begin{array}{r|r|l}
294 & 336 & 1 \\
 & 294 & \\
\hline
42 & 294 & 7 \\
 & 294 & \\
\hline
 & \text{——} &
\end{array}$$

folglich ist 42 das gesuchte größte gemeinschaftliche Gemäß.

Das Verfahren ergibt sich aus §. 56. N. 4. u. N. 5.

Anmerkg. 1. Will man das größte gemeinschaftliche Gemäß von mehreren gegebenen Zahlen finden, so verfahre man (nach §. 60. N. 12.).

Anmerkg. 2. Auch das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier Zahlen kann nun leicht (nach §. 60. N. 11.) gefunden werden; so wie dann auch (nach §. 60. N. 13.) das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von beliebig viel gegebenen Zahlen.

10.

Soll ein Quotient, dessen Dividend und Divisor Produkte sind, numerisch bestimmt werden, und kommen unter den Faktoren auch gebrochene oder gemischte Zahlen vor (außer ganzen Zahlen), so multiplicire man den Dividenden und den Divisor mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen zweier Nenner, von denen der eine im Dividenden, der andere aber im Divisor vorkommt; und setze dieses Verfahren mit jedem neuen dadurch entstehenden Quotienten so lange fort, bis ein Quotient entsteht, dessen Dividend und Divisor Produkte ganzer Zahlen sind, der dann (nach N. 1.) behandelt werden muß (§. 37. NN. 28., 29. u. 26.). — So erhält man z. B. statt des Quotienten

$$\frac{(3\tfrac{3}{4})\cdot\tfrac{5}{6}\cdot 14\cdot(2\tfrac{2}{5})}{(2\tfrac{5}{8})\cdot 10\cdot\tfrac{2}{3}}$$

indem man zuerst Dividend und Divisor mit 8 multiplicirt:

$$\frac{30\cdot\frac{5}{6}\cdot 14\cdot(2\frac{2}{5})}{21\cdot 10\cdot\frac{2}{3}}, \quad \text{dann} \quad \frac{30\cdot 5\cdot 14\cdot(2\frac{2}{5})}{21\cdot 10\cdot 4},$$

endlich $\frac{30\cdot 5\cdot 14\cdot 12}{21\cdot 10\cdot 4\cdot 5}$; und dieser (nach N. 2.) behandelt, gibt die ganze Zahl 6 als Endresultat.

11.

Bei dem numerischen Multipliciren und Dividiren gegebener Decimalbrüche findet auch noch eine Art, diese Aufgabe zu lösen statt, welche die abgekürzte Multiplikation und die abgekürzte Division genannt wird.

Es erhält nämlich bekanntlich das numerische Produkt zweier gegebenen Decimalbrüche z. B. 11 Decimalstellen, wenn der eine Faktor deren 6, der andere aber 5 derselben hat. Wünscht man daher vom Produkt ebenfalls nur die 5 oder 6 ersten Decimalstellen zu haben, so kann man die übrigen gleich während der Multiplikation weglassen. Das Verfahren besteht darin, daß man bei der numerischen Multiplikation der ganzen Zahlen (nach §. 83.) im Multiplikator mit der Ziffer am weitesten zur Linken anfängt zu multipliciren, mit jeder der zur rechten folgenden Ziffern fortfährt, und natürlich dann die einzelnen entstehenden numerischen Produkte unter einander so setzt, daß jedes folgende um eine Stelle weiter zur Rechten gerückt wird, diese zur Rechten hinausgerückten (oder vielmehr hinauszurückenden) Stellen aber sogleich wegläßt, wie folgendes Beispiel zeigt:

```
  9,764327             9,764327
  2,72953              2,72953
  ------------         ---------
  19528654             19528654
   68350289             6835029
    19528654             195286
     87878943             87879
      48821635             4882
       29292981             293
  ---------------      ---------
  26,65202347631       26,652023
```

Links steht die vollständige, rechts die abgekürzte Multiplikation.

Vergleicht man beide, so abstrahirt sich leicht noch Folgendes:

α) Man erreicht seinen Zweck, wenn man bei jeder folgenden Ziffer des Multiplikators (von der Linken zur Rechten) eine Ziffer (von der Rechten zur Linken) des Multiplikanden wegläßt, und nur noch die zur Linken stehenden Ziffern des Multiplikanden multiplicirt.

β) Man muß aber doch auch eine oder zwei der zunächst vorhergehenden und (nach α) wegzulassenden Ziffern des Multiplikanden in Gedanken multipliciren, um so ungefähr zu wissen, wie viel von den frühern Produkten zu dem, welches erst hingeschrieben wird, noch hinübergezählt werden müsse.

γ) So viel Vorsicht man auch anwendet, so stimmt doch die letzte Decimalstelle nicht immer mit derjenigen derselben Ordnung des vollständigen Produkts überein.

δ) Um diesem einigermaßen vorzubeugen, hat man auch die Regel: die Ziffer, welche zu dem jedesmaligen zuerst hingeschriebenen Produkt, von dem vorhergehenden (aber weggelassenen Produkt) noch hinzugenommen werden muß, um 1 zu erhöhen, sobald die andere zur Rechten stehende >5 ist.

ε) Ist m die Anzahl der Decimalen des Multiplikanden, n aber die Anzahl derselben des Multiplikators und p die Zahl der im Schema des abgekürzten Produkts unter einander geschriebenen Reihen, so bekommt das abgekürzte Produkt

$$m+n-(p-1) \quad \text{oder} \quad m+n+1-p \text{ Decimalen.}$$

ζ) Es gehört viel Uebung dazu, um das abgekürzte Produkt mit dem wahren, so viel wie möglich übereinstimmend zu erhalten.

12.

Seltener anwendbar ist die abgekürzte Division der Decimalbrüche. Diese besteht aber darin, daß man bei der numerischen Division der ganzen Zahlen, statt jedesmal eine Ziffer des Dividenden (die auch eine angehängte Null sein kann) her-

abzusetzen, lieber eine Ziffer zur Rechten des Divisors wegläßt, und dies so lange wiederholt, bis der Divisor nur noch drei, zwei und zuletzt nur noch eine Ziffer hat. Es sei z. B. der Decimalbruch 4,0798437 durch diesen andern 1,29764 numerisch zu dividiren. Man erhält:

```
1,29764 |4,0798437.....| 3,1440489
        |3 89292.......|
          186923......
          129764......
           571597.....
           519056.....
            525410....
            519056....
             635400..
             519056..
             1163440.
             1038112.
              1253280
              1167876
                85404  u. s. w. f.
```

Die abgekürzte Division gibt:

```
1,29764 |4,0798437|3,1440489
        |3 89292..|
          186923.
          129764.
           571597
           519056
   12976 |52541
         |51906
    1297 | 635
     129 | 635
           519
      12 |116
         |104
       1 | 12
         |  9
            3
```

Vergleicht man beide Schema, so findet man leicht:

α) Der Quotient muß bei der abgekürzten Division in der Regel größer werden. Man muß daher, um diesem Uebel vorzubeugen, die weggelassenen Stellen des Divisors auf eine ähnliche Art wie N. 11. β.) in Rechnung bringen.

β) Der Quotient bekommt $(m+p-1)-n$ oder $(m+p)-(n+1)$ Decimalstellen, wenn m die Anzahl der benutzten Decimalen des Dividenden, n die Anzahl derer des Divisors, und p die Anzahl aller zur Division benutzten (ganzen oder Decimal-) Stellen des Divisors bezeichnet.

Zweite Abtheilung.

Praktische Methoden, die Verwandlung allgemeiner Ausdrücke betreffend.

Wenn bei allgemeinen, Buchstaben enthaltenden Ausdrücken, es einerlei ist, in welcher Ordnung diese Buchstaben geschrieben werden, so schreibe man sie jedesmal, so viel wie möglich, in alphabetischer Ordnung.

13.

Bei Produkten aus Buchstaben allein, oder aus Ziffern-Ausdrücken und Buchstaben, schreibe man die Buchstaben in alphabetischer Ordnung, die Ziffern-Ausdrücke dagegen zur Linken (vorne an). — Man schreibe also statt $b \cdot 7 \cdot a \cdot c$, lieber 7abc.

Die in einem solchen Produkt voranstehenden Ziffern-Ausdrücke nennt man auch die Koeffizienten, sobald sie ganzen oder gebrochenen Zahlen gleich sind.

14.

Dieselbe Regel beobachte man, wenn zwei Produkte, z. B. 7ac und 5bd mit einander multiplicirt werden sollen, und schreibe

daher $7 \cdot 5 \cdot abcd$. — Gewöhnlich multiplicirt man gleich beide Koeffizienten numerisch, und erhält dann $35abcd$.

15.

Auch wenn dergleichen Produkte, z. B. $12acd$ und $4c$ durch einander dividirt werden sollen, pflegt man die Ziffern-Ausdrücke zuerst numerisch zu dividiren. Man schreibt also statt $\frac{12acd}{4c}$, zunächst $\frac{12}{4} \cdot \frac{acd}{c}$, und dann $3ad$.

16.

Bei jeder algebraischen Summe sehe man jedesmal genau zu, ob sie nicht gleiche Glieder hat, von denen das eine ein addirtes, das andere ein subtrahirtes ist; um sie gegenseitig weglassen zu können.

17.

Sind Produkte, wie in N. 3.) oder N. 14.) zu einander zu addiren oder von einander zu subtrahiren, so sehe man darauf, ob die Buchstaben-Faktoren in beiden gemeinschaftlich sind; denn dann lassen sich die Summen und die Differenzen dieser Produkte (nach §. 37. NN. 29. 30.), in ein solches Produkt verwandeln.

So erhält man statt der Summe:

$$7ab+9ab+5ab,$$

das Produkt $(7+9+5) \cdot ab$ oder $21 \cdot ab$; eben so statt der Differenz $16acd-9acd$, das Produkt $7acd$.

18.

Wegen $a = 1 \cdot a = a \cdot 1$ kann man sich jeden Ausdruck a als ein Produkt denken, dessen Koeffizient 1 ist.

Auf diese Weise erhält man statt der Summe

$$9\frac{cp}{q}+4\frac{cp}{q}+\frac{cp}{q} \text{ das Produkt } (9+4+1)\frac{cp}{q} \text{ oder } 14\frac{cp}{q}.$$

Eben so statt der Differenz $ax-x$, das Produkt $(a-1)x$.

19.

Bei jeder vorkommenden algebraischen Summe ist sorgfältig nachzusehen, ob sie nicht Glieder hat, wie die in N. 17.) und N. 18.) erwähnten, weil solche sehr einfach in ein Glied vereinigt werden können.

Z. B. statt der algebraischen Summe

$$17ab-\tfrac{7}{3}ac+14a-\tfrac{3}{2}ac+7b+2ac-7abc$$

kann man setzen, die ihr gleiche:

$$17ab+14a+7b-7abc+(-\tfrac{7}{3}-\tfrac{3}{2}+2)ac$$

oder $$17ab+14a+7b-7abc-\frac{11}{6}ac.$$

Vorzüglich anwendbar ist das hier Gesagte da, wo algebraische Summen addirt oder subtrahirt werden sollen.

20.

Bei jedem Quotienten zweier Produkte hat man nachzusehen, ob diese Produkte nicht gemeinschaftliche Faktoren haben, um Dividend und Divisor durch sie dividiren zu können, und sonach einen einfacheren Quotienten zu erhalten. —

Z. B. statt des Quotienten

$$\frac{24(ax-x^2)bd(ax+x^2)}{3b(a^2-x^2)xy},$$

erhält man als ihm gleich, den Quotienten $\frac{8 \cdot d \cdot x}{y}$. — Es ist nämlich

$$ax-x^2=(a-x)x, \quad \text{und} \quad (ax+x^2)=(a+x)x,$$

so wie auch $a^2-x^2=(a+x)(a-x)$; folglich obiger Quotient

$$=\frac{24 \cdot (a-x) \cdot x \cdot b \cdot d \cdot (a+x) \cdot x}{3 \cdot b \cdot (a-x) \cdot (a+x) \cdot x \cdot y},$$

daher auch $=\frac{8 \cdot d \cdot x}{y}$. (§. 37. N. 28.).

21.

Um einen Ausdruck in Faktoren zu zerlegen, kann man sich zuweilen mit Vortheil nachstehender Formeln bedienen:

α) $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$,

β) $a^3-b^3 = (a^2+ab+b^2)(a-b)$,

γ) $a^3+b^3 = (a^2-ab+b^2)(a+b)$,

δ) $a^4-b^4 = (a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)$
$= (a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)$
$= (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$,

ε) $a^5-b^5 = (a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)$,

ζ) $a^5+b^5 = (a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)(a+b)$,

und ähnliche mehr.

So erhält man z. B. statt

$$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$$

erstlich

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2;$$

dann (nach α)

$$[2ab+(a^2+b^2-c^2)]\cdot[2ab-(a^2+b^2-c^2)]$$

oder

$$[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2];$$

folglich (nach α):

$$[(a+b)+c][(a+b)-c]\cdot[c+(a-b)][c-(a-b)];$$

oder

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Dieses Verwandeln gegebener algebraischer Summen in Produkte, ist auch bei der numerischen Bestimmung gegebener Ausdrücke oft von sehr großem Nutzen.

22.

Sind mehrere Quotienten mit einander zu multipliciren, so kann man, ehe man sie nach §. 38. N. 36. behandelt, erst von irgend einem der Dividenden und von irgend einem der Divisoren die, beiden gemeinschaftlichen Faktoren weglassen. —

So z. B. erhält man statt

$$\frac{5ac}{bde}\cdot\frac{7bfg}{3ad} \text{ zunächst } \frac{5c}{de}\cdot\frac{7fg}{3d}, \text{ dann } \frac{35cfg}{3dde}.$$

23.

Wegen $a=\frac{a}{1}$ kann derselbe Vortheil noch benutzt werden, wenn auch nicht alle Faktoren Quotienten sind.

Z. B. statt

$$4ab\cdot\frac{3cde}{2aab}\cdot\frac{1}{5cf}, \text{ erhält man } \frac{6de}{5af}.$$

24.

Derselbe Vortheil findet statt, wenn zwei Quotienten durch einander dividirt werden sollen, weil dann der Dividend mit dem umgekehrten Divisor multiplicirt wird (§. 38. N. 37.).

25.

Nicht minder auch, wenn Brüche und ganze Zahlen mit einander numerisch zu multipliciren oder zu dividiren sind.

26.

Sind mehrere Ausdrücke mit einander zu multipliciren, die theils additive Zahlen, theils subtraktive sind, so multiplicire man unmittelbar ihre Glieder und setze dem Produkt ein (–) Zeichen vor, wenn die Anzahl der subtraktiven Faktoren ungerade ist; in jedem andern Falle aber ein (+) Zeichen. — Bei der Multiplikation der Glieder dieser additiven und subtraktiven Zahlen, können dann wiederum die in den vorhergehenden Nummern bemerkten Vortheile angewandt werden. —

So erhält man z. B.

$$\text{statt } \frac{5ac}{bde}\cdot\left(-\frac{7bfg}{3ad}\right), \text{ jetzt } -\frac{35cfg}{3dde},$$

$$\text{statt } (-4ab)\cdot\left(-\frac{3cde}{2aab}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5cf}\right), \text{ jetzt } -\frac{6de}{5af},$$

u. s. w. (§. 39.).

27.

Soll eine subtraktive Zahl mit einer positiven ganzen Zahl potenzirt werden, so potenzirt man ebenfalls nur das Glied der subtraktiven Zahl, und setzt dem Resultat ein (—) Zeichen vor, wenn der Exponent eine ungerade Zahl ist, während es ungeändert bleibt, so lange der Exponent eine gerade Zahl.

Z. B. statt

$\left(-\frac{2a}{3}\right)^7$ bekommt man $-\left(\frac{2a}{3}\right)^7$, oder $-\frac{2^7 \cdot a^7}{3^7}$, oder $-\frac{128a^7}{2187}$;

dagegen statt $\left(-\frac{2a}{3}\right)^4$ hat man $\left(\frac{2a}{3}\right)^4$, oder $\frac{16a^4}{81}$ (§. 66.).

28.

Sollen zwei algebraische Summen, deren Glieder alle oder zum Theil solche Produkte wie N. 14.) und N. 15.) sind, mit einander multiplicirt, oder durch einander dividirt werden (welches nach §. 41. geschieht, so müssen die meisten der vorhergehenden Nummern in Anwendung gebracht werden. Uebrigens hat man bloß nach den angeführten Paragraphen zu verfahren.

Beispiel 1. Es seien die beiden algebraischen Summen

$$2a-3b-\tfrac{2}{3}c+4\frac{d}{f}+\tfrac{1}{2}g$$

und $$-3a+2b+4c+9\frac{d}{f}-\tfrac{2}{5}h$$

mit einander zu multipliciren.

Man erhält zunächst (nach §. 41.):

$$-6a^2+9ab+2ac-12\frac{ad}{f}-\tfrac{3}{2}ag$$

$$+4ab-6b^2-\tfrac{4}{3}bc+8\frac{bd}{f}+bg$$

$$+8ac-12bc-\tfrac{8}{3}c^2+16\frac{cd}{f}+2cg$$

$$+18\frac{ad}{f}-27\frac{bd}{f}-6\frac{cd}{f}+36\frac{d^2}{f^2}+\tfrac{9}{2}\frac{dg}{f}$$

$$-\tfrac{4}{5}ah+\tfrac{6}{5}bh+\tfrac{4}{15}ch-\tfrac{8}{5}\frac{dh}{f}-\tfrac{1}{5}gh$$

und statt dieser algebraischen Summe von 25 Gliedern kann man (nach §§. 27. 25.) und N. 19.) folgende setzen, welche nur 19 Glieder hat, nämlich:

$$-6a^2+13ab+10ac-6b^2-\tfrac{40}{3}bc+6\frac{ad}{f}-\tfrac{3}{2}ag-\tfrac{4}{5}ah+\tfrac{6}{5}bh-\tfrac{8}{3}c^2$$

$$-19\frac{bd}{f}+bg+\tfrac{4}{15}ch+10\frac{cd}{f}+2cg-\tfrac{8}{5}\frac{dh}{f}+36\frac{d^2}{f^2}+\tfrac{9}{2}\frac{dg}{f}-\tfrac{1}{5}gh$$

und welche dem Produkte der beiden gegebenen algebraischen Summen gleich sein muß.

Beispiel 2. Es sei die algebraische Summe

$$-10a^2+11ab+6b^2-5ad-38bc-2bd+40c^2+10cd$$

durch diese zweite algebraische Summe

$$4c+2a+d-3b$$

zu dividiren.

Man erhält, zunächst nach §. 41.) verfahrend, sogleich eine unendliche Menge von Resultaten, in so ferne der erste Summand jedesmal ganz willkürlich angenommen werden kann. Einige Uebung bringt es aber leicht dahin, jedesmal das einfachste Resultat sogleich zu erhalten. Man darf zu dem Ende nur die Glieder des Divisors nehmen und sehen, ob sich nicht zu ihnen bezüglich Glieder des Dividenden auffinden lassen, so daß letztere bezüglich durch erstere dividirt, wenigstens einerlei Buchstaben-Resultate geben. Findet sich solches, so dividirt man eines dieser Glieder des Dividenden durch das bezügliche Glied des Divisors und nimmt diesen Quotienten als ersten Summanden an.

Obige Aufgabe kann diesem nach, unter folgendes Schema gebracht werden:

Divisor	Dividend	Quot.
$4c+2a+d-3b$	$-10a^2+11ab+6b^2-5ad-38bc-2bd+40c^2+10cd$	$-5a$
Div. $\times -5a =$	$-20ac-10a^2-5ad+15ab$	$+10c$
Differenz	$= 20ac-4ab+6b^2-38bc-2bd+40c^2+10cd$	$-2b$
Divisor $\times 10c$	$= 40c^2+20ac+10cd-30bc$	
Differenz	$= -4ab+6b^2-8bc-2bd$	
Divisor $\times -2b$	$= -8bc-4ab-2bd+6b^2$	
Differenz	= Null.	

Der gesuchte einfachste algebraische Quotient der beiden gegebenen algebraischen Summen ist daher

$$-5a-2b+10c.$$

Anmerkg. Man erleichtert sich das Operiren mit solchen algebraischen Summen sowohl, als mit andern solchen Ausdrücken sehr, wenn man überall, wo es erlaubt ist, die einzelnen Theile des Ausdrucks so ordnet, daß die Buchstaben alle einzeln, so viel wie nur immer möglich ist, in der Ordnung des Alphabets auf einander folgen. — Daher ist dieses Ordnen eine wohl zu beachtende Regel.

29.

Der Quotient zweier algebraischen Summen wird dadurch zuweilen viel einfacher, daß man den Dividenden und den Divisor in Produkte verwandelt.

Z. B. statt des Quotienten $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$, hat man $\frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}$, folglich auch $\frac{a+b}{a-b}$.

30.

Soll eine algebraische Summe, deren Glieder alle oder zum Theil Quotienten sind, in einen Quotienten verwandelt werden, so kann man ebenfalls nach N. 3.) verfahren, in so ferne die dort angewandten Sätze der Theorie, gerade so auch hier angewandt werden können.

Es sei z. B. die algebraische Summe

$$\frac{p}{4qx}-\frac{r}{8aq}+\frac{b}{3(a^2-ax)}-\frac{t}{ax-x^2}$$

in einen Quotienten zu verwandeln. — Der Generaldivisor findet sich

$$24aqx(a-x)$$

und die Dividenden der einzelnen Quotienten sind bezüglich:

$$6ap(a-x),\quad 3rx(a-x),\quad 8bqx,\quad 24aqt$$

so wie die, den einzelnen gegebenen Gliedern gleichen Quotienten, bezüglich:

$$\frac{6ap(a-x)}{24aqx(a-x)},\quad \frac{3rx(a-x)}{24aqx(a-x)},\quad \frac{8bqx}{24aqx(a-x)},\quad \frac{24aqt}{24aqx(a-x)};$$

und der gesuchte Quotient ist daher der nachstehende:

$$\frac{6ap(a-x)-3rx(a-x)+8bqx-24aqt}{24aqx(a-x)}.$$

31.

Auch erhält man, unter der Voraussetzung, daß man lauter absolute Wurzeln habe*),

$$\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{xx}}=\frac{\sqrt{ax}}{x},$$

$$\sqrt{\frac{ab}{x^2(a-x)}}=\sqrt{\frac{ab(a-x)}{x^2(a-x)^2}}=\frac{\sqrt{ab(a-x)}}{x(a-x)},$$

$$\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[3]{xy^2}}{y},$$

$$\sqrt[3]{\frac{ab(a-x)}{x^2\cdot y\cdot(a+x)^2}}=\sqrt[3]{\frac{ab(a-x)(a+x)xy^2}{x^3\cdot y^3\cdot(a+x)^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{ab(a-x)(a+x)xy^2}}{xy(a+x)}=\frac{\sqrt[3]{[abxy^2(a^2-x^2)]}}{xy(a+x)}.$$

Endlich auch

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}}=\frac{\sqrt[n]{(xy^{n-1})}}{y};\quad \text{u. s. w. f.}$$

---

*) Statt $\sqrt[2]{\ }$ schreibt man gewöhnlich nur $\sqrt{\ }$, und denkt sich den Wurzel-Exponenten 2 noch hinzu.

32.

Multiplicirt man eine algebraische Summe mehreremale mit sich selbst, so erhält man nach und nach ihre zweite, dritte, vierte u. s. w. Potenz. — Soll nun, unter der Voraussetzung, daß alle diese algebraischen Summen absoluten ganzen oder gebrochenen Zahlen gleich sind, aus einer dieser letztern algebraischen Summen, die erstere, welche bezüglich der zweiten, dritten, vierten u. s. w. Wurzel gleich ist, gefunden werden, so kann dies nur versuchsweise geschehen.

Es sei z. B., unter obiger Voraussetzung, die der Wurzel:

$$\sqrt{\left(9x^2-30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}\right)}$$

gleiche algebraische Summe zu finden. — Unter den Gliedern des Radikanden finden sich $9x^2$, $25a^2$, $\frac{a^4}{4}$, welche vollständige Quadrate sind, deren Wurzeln bezüglich $3x$, $5a$ und $\frac{a^2}{2}$ sind. Eine aus diesen Gliedern zusammengesetzte algebraische Summe kann nun die gesuchte sein; ob aber $3x+5a-\frac{a^2}{2}$, oder $3x-5a+\frac{a^2}{2}$, oder $-3x+5a+\frac{a^2}{2}$, oder $3x-5a-\frac{a^2}{2}$, u. s. w. oder keine von allen, muß versuchweise entschieden werden.

Sollte, unter derselben Voraussetzung*),

$$\sqrt[3]{(8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6)}$$

in eine algebraische Summe verwandelt werden, so fände man im Radikanden die Glieder $8x^6$, $80c^3x^3$, $27c^6$, welche vollständige dritte Potenzen zu sein scheinen.

Die Ausdrücke $2x^2$, $4cx$, $3c^2$ sind daher wahrscheinlich Glieder der gesuchten algebraischen Summe. Ob aber

---

*) Daß alle Radikanden absoluten Zahlen gleich sind.

$2x^2-4cx+3c^2$, oder $-2x^2-4cx-3c^2$, oder $-2x^2+4cx-3c^2$, oder $2x^2+4cx-3c^2$ u. s. w. f., diese selbst sei? — müssen die Versuche lehren, welche dabei sehen lassen können, daß überhaupt die Aufgabe unmöglich ist.

Man erleichtert sich diese Versuche, wenn man Glied um Glied der gesuchten algebraischen Summe zu entwickeln unternimmt, auf eine der §. 86. erwähnten, ähnlichen Art.

Die Arbeit bekommt dann folgende Gestalt:

Für das erste Beispiel:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \text{Radikand.} & \text{gesuchte algebr. Summe} \\
 & 9x^2-30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4} & 3x \\
 & 9x^2 & \\
\hline
6x & -30ax-3a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4} & -5a \\
 & -30ax \qquad +25a^2 & \\
\hline
6x-10a & -3a^2x+5a^3+\frac{a^4}{4} & -\frac{1}{2}a^2. \\
 & -3a^2x+5a^3+\frac{a^4}{4} & \\
\hline
 & — \quad — \quad — &
\end{array}$$

Man findet auf dieselbe Weise, wenn man $-3x$ als erstes Glied nimmt, auch

$$-3x+5a+\frac{a^2}{2}.$$

Welche von beiden algebraischen Summen allen Forderungen der Aufgabe Genüge leiste, kann erst in jedem besondern Fall angegeben werden.

Für das zweite Beispiel erhält man:

$$\begin{array}{l|l|l}
 & 8x^6+48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6 & 2x^2+4cx-3c^2 \\
 & 8x^6 & \\
\hline
12x^4 & 48cx^5+60c^2x^4-80c^3x^3-90c^4x^2+108c^5x-27c^6 & \\
 & 48cx^5+96c^2x^4+64c^3x^3 & \\
\hline
12x^4+48cx^3+48c^2x^2 & -36c^2x^4-144c^3x^3-\ 90c^4x^2+108c^5x-27c^6 & \\
 & -36c^2x^4-144c^3x^3-144c^4x^2 & \\
 & \qquad\qquad\qquad + 54c^4x^2+108c^5x-27c^6 & \\
\hline
 & — \quad — \quad — \quad — \quad — &
\end{array}$$

so daß sich also $2x^2+4cx-3c^2$ als die der gegebenen dritten Wurzel gleiche algebraische Summe findet.

33.

Enthält eine algebraische Summe Glieder, welche Wurzeln oder Produkte aus Wurzeln sind, so kann man zuweilen, unter obiger Voraussetzung *), bedeutend einfachere setzen. —

So z. B. erhält man

$$2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=8\sqrt{2}$$

und

$$\sqrt[3]{(54a^{m+6}b^3)}-\sqrt[3]{(16a^{m-3}b^6)}+\sqrt[3]{(2a^{4m+9})}+\sqrt[3]{(2c^3a^m)}$$
$$=(3a^2b-\frac{2b^2}{a}+a^{m+3}+c)\sqrt[3]{(2a^m)}.$$

Diese Abkürzung solcher Ausdrücke besteht aber im wesentlichen darin, daß man die Radikanden in Produkte verwandelt, die alle einen gemeinschaftlichen Faktor haben, und in denen der andere Faktor so ist, daß aus ihm das Wurzelzeichen ganz wegfallen kann.

Es ist nämlich

$8=\ 4\cdot2,$	folglich	$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2},$
$18=\ 9\cdot2,$	"	$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{2},$
$72=36\cdot2,$	"	$\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2},$
und		$\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$

Eben so ist

$$54a^{m+6}b^3=27a^6b^3\cdot(2a^m),$$

folglich $\sqrt[3]{(54a^{m+6}b^3)}=3a^2b\cdot\sqrt[3]{2a^m};$

auch $16a^{m-3}b^6=8a^{-3}b^6\cdot(2a^m);$

also $\sqrt[3]{(16a^{m-3}b^6)}=2a^{-1}b^2\sqrt[3]{2a^m}=\frac{2b^2}{a}\sqrt[3]{(2a^m)};$

u. s. w. f.

---

*) Daß alle Radikanden, so wie die Wurzeln selbst, absoluten Zahlen gleich sind.

34.

Das Produkt zweier oder mehrerer Wurzeln, deren Wurzel-Exponenten verschieden sind, kann, wie folgt, einfach in eine Wurzel verwandelt werden. — So wie man nämlich, wegen $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$, Brüche unter gleiche Benennung bringen kann, so kann man auch Wurzeln vermittelst des Satzes

$$\sqrt[m]{(a^n)} = \sqrt[mp]{(a^{np})} \quad (\S.\ 77.\ \text{N}.\ 6.)$$

in andere verwandeln, die ihnen bezüglich gleich sind, aber einerlei Wurzel-Exponenten haben.

Statt des Produkts:

$$\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{\tfrac{1}{3}} \cdot \sqrt[8]{3}$$

erhält man dann:

$$\sqrt[24]{(2^8)} \cdot \sqrt[24]{(\tfrac{1}{3})^4} \cdot \sqrt[24]{(3^3)},$$

oder $\sqrt[24]{(2^8 \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot 3^3)}$, oder $\sqrt[24]{\left(\frac{2^8}{3}\right)}$, oder $\sqrt[24]{\frac{256}{3}}$.

35.

Der Formel

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\left(\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}\right)},$$

die nach §. 77. erwiesen wird (aber unter der Voraussetzung, daß alle vorkommenden Radikanden absoluten Zahlen gleich sind), kann man sich oft mit Vortheil bedienen, um die Quadratwurzel aus einer algebraischen Summe, deren Glieder selber wieder Wurzeln enthalten, in eine ähnliche algebraische Summe zu verwandeln.

Sie gibt z. B.:

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3},$$

$$\sqrt{87 - 12\sqrt{42}} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{6},$$

$$\sqrt{a^2+b+2a\sqrt{b}} = a+\sqrt{b},$$

$$\sqrt{b^2-ab+\frac{a^2}{4}+\sqrt{4ab^3-8a^2b^2+a^3b}}$$

$$= \sqrt{ab}+\sqrt{b^2-2ab+\frac{a^2}{4}}.$$

36.

Umgekehrt kann man auch gegebene Ausdrücke mit sich multipliciren (quadriren) und dann aus dem Quadrat wieder die zweite Wurzel ausziehen, um einen dem gegebenen gleichen Ausdruck zu erhalten, der in manchen Fällen sehr einfach werden kann. So z. B. erhält man auf diese Weise statt

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \pm \sqrt{a-\sqrt{b}},$$

den Ausdruck $\sqrt{2a \pm 2\sqrt{a^2-b}}$.

Eben so statt:

$$\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}+\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)}+\sqrt{\left(\frac{abf+c^2}{bc}-\sqrt{\frac{4af}{b}}\right)},$$

erhält man den sehr einfachen Ausdruck

$$\sqrt{\frac{4af}{c}}.$$

Anmerkung. Man muß aber bei allen diesen Verwandlungen mit Wurzeln ja nicht aus der Acht lassen, daß sie nur unter der Voraussetzung stattfinden können, daß die Wurzeln wirklich eine Bedeutung haben, und daß sie hier zunächst nur unter der Voraussetzung aufgestellt sind, daß ihre Radikanden absoluten Zahlen gleich seien, so daß die Wurzeln selber nur eindeutig sind und die in den §§. 71. 72.) gegebene Bedeutung haben.

Siebentes Kapitel.

Von den Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen, und von der Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem und mit mehreren Unbekannten.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Begriffe.

§. 95. Erklärung.

Die Gleichungen, welche an sich nicht, sondern nur unter der Voraussetzung richtig sind, daß einer oder mehrere der darin vorkommenden Buchstaben x, y, z, ꝛc. bestimmte Ausdrücke vorstellen, nenne man **Bestimmungs-Gleichungen**, in so ferne sie gewöhnlich dazu dienen, die noch **unbekannten**, unter x, y, z, ꝛc. vorgestellten Ausdrücke zu bestimmen. — Die Buchstaben, welche in einer solchen Gleichung bestimmte Ausdrücke vorstellen, heißen daher auch die **Unbekannten**. — Eine Gleichung dagegen, die an sich richtig ist, d. h. in welcher man sich um die Bedeutung keines der Buchstaben bekümmert, (welche richtig ist und bleibt, was man sich auch unter jedem der einzelnen Buchstaben vorgestellt denken mag), heiße von nun an zum Unterschied, eine **identische** Gleichung.

So ist z. B. die Gleichung

$$a \cdot \frac{b}{a} = b$$

eine richtige, sie wird also jetzt eine identische genannt; setzt man aber in ihr den Buchstaben x statt des Quotienten $\frac{b}{a}$, so daß sie in

$$a \cdot x = b$$

übergeht, so ist letztere an sich nicht mehr richtig, d. h. sie gilt nicht mehr für jeden Werth eines jeden Buchstaben, d. h. sie gilt nicht mehr ganz unabhängig von der Bedeutung der Buchstaben, d. h. sie drückt nicht mehr bloß das Verhalten der Operationen zu einander aus, — sondern sie gilt nur unter der ausdrücklichen Annahme, daß der Buchstabe x eine völlig bestimmte (wenn auch häufig noch unbekannte) Bedeutung habe, hier nämlich den Quotienten $\frac{b}{a}$ oder doch jeden Ausdruck vorstelle, der diesem Quotienten $\frac{b}{a}$ gleich ist. — Diese Gleichung $ax = b$ dient jetzt sogar zu der Bestimmung des unter x vorgestellten Ausdrucks, wenn solcher noch unbekannt sein sollte, und deshalb führt sie den Namen der Bestimmungs-Gleichung.

Auf dieselbe Weise sind die zwei Gleichungen

$$a \cdot \frac{cn+bp}{an+bm} + b \cdot \frac{cm-ap}{an+bm} = c$$

und

$$m \cdot \frac{cn+bp}{an+bm} - n \cdot \frac{cm-ap}{an+bm} = p,$$

richtige Gleichungen (weil sie in $c = c$ und $p = p$ übergehen, wenn man sie mit $an+bm$ multiplicirt); sie werden also jetzt identische Gleichungen genannt. Setzt man aber

$$x \text{ überall statt } \frac{cn+bp}{an+bm}$$

und

$$y \quad " \quad " \quad \frac{cm-ap}{an+bm},$$

so nehmen dieselben Gleichungen die Form an

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

und

$$m \cdot x - n \cdot y = p$$

und nun sind sie an sich nicht mehr richtige Gleichungen, sondern nur unter der Voraussetzung, daß x und y die oben stehenden Quotienten bedeuten. Diese letzteren Gleichungen werden nun Bestimmungs-Gleichungen genannt.

Anmerkg. Die Bestimmungsgleichungen unterscheiden sich also von den identischen nur der Form nach; dem Wesen nach sind sie ebenfalls keine andern als identische Gleichungen, eben weil es nur richtige Gleichungen geben kann.

§. 96. Erklärung.

Die Bestimmungsgleichungen werden eingetheilt in Gleichungen mit einem, zwei, drei 2c. und mehr Unbekannten. — Jede dieser wieder in algebraische und in transcendente; und die algebraischen wieder in Gleichungen der (s) 1ten, 2ten, 3ten, 2c. nten Ordnung (Grades). — Die des ersten Grades oder der ersten Ordnung heißen auch einfache; die des zweiten Grades werden auch quadratische Gleichungen genannt; und unter kubischen und biquadratischen Gleichungen versteht man die des 3ten und 4ten Grades. — Alle nicht einfachen algebraischen Gleichungen werden auch höhere genannt. — In folgendem Schema erkennt man die hieher gehörigen Definitionen:

I. Gleichungen mit einem Unbekannten.

I. 1) Algebraische (wenn x der Unbekannte ist):

1) $ax + b = 0$, oder $ax = b$;

2) $ax^2 + bx + c = 0$, oder $ax^2 + bx = c$;

3) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$;

4) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$;

5) $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$;

6) $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots + px + q = 0$,

wo die Gleichung N. 6.) nach x vom m^{ten} Grade ist.

I. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen, welche durch keine Umwandlung auf diese vorstehenden Formen gebracht werden können, obgleich sie nur einen einzigen Unbekannten (x) enthalten.

II. Gleichungen mit 2 Unbekannten x und y.

II. 1) Algebraische:

1) $ay+bx+c=0$, oder $ax+by=c$;

2) $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$;

3) $ay^3+bxy^2+cx^2y+dx^3+ey^2+fxy+gx^2$
$+hy+kx+l=0$;

4) $ay^4+bxy^3+cx^2y^2+dx^3y+ex^4+fy^3+gxy^2$
$+hx^2y+kx^3+ly^2+mxy+nx^2+py+qx+r=0$;

u. s. w. f.,

wo die Gleichungen 1.), 2.), 3.) und 4.) nach den beiden Unbekannten x und y bezüglich von der 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten}, 4^{ten} Ordnung sind.

II. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen mit 2 Unbekannten, welche durch keine Umwandlung auf eine der vorstehenden Formen gebracht werden können.

III. Gleichungen mit 3 Unbekannten x, y, z.

III. 1) Algebraische:

1) $az+by+cx+d=0$, oder $ax+by+cz=d$;

2) $az^2+byz+cy^2+dxz+exy+fx^2+gz+hy+kx+l=0$;

u. s. w. f.

III. 2) Transcendente: wie in II. 2.).

IV. Gleichungen mit 4 Unbekannten x, y, z, t.

IV. 1) Algebraische:

1) $at+bz+cy+dx+e=0$;

2) $at^2+bzt+cz^2+dyt+eyz+fy^2+gxt+hxz+kxy+lx^2$
$+mt+nz+py+qx+r=0$;

u. s. w. f.

IV. 2) Transcendente: Alle diejenigen Gleichungen mit 4 Unbekannten, welche durch keine Umwandlung auf diese vorstehenden Formen gebracht werden können.

V. Gleichungen mit beliebig viel Unbekannten.

§. 97. Erklärung.

Die Ausdrücke, welche in diesen algebraischen Gleichungen mit den Unbekannten oder ihren Potenzen und Produkten multiplicirt erscheinen, heißen die Koeffizienten der Gleichung; und eine Gleichung selbst heißt nach einem oder nach mehreren Unbekannten geordnet, wenn sie, in Bezug auf diesen Unbekannten, oder in Bezug auf diese mehreren Unbekannten, auf eine der vorstehenden Formen gebracht ist. — Ein Glied einer solchen Gleichung ist von der p^{ten} Dimension, wenn die Summe der Exponenten der Unbekannten in diesem Gliede $= p$ ist. So sind z. B. die Glieder $2x^5$, $3x^2y^3$, $-4xyz^3$, y^5, von der 5^{ten} Dimension. — Die Koeffizienten einer algebraischen Gleichung können übrigens alle beliebigen Werthe haben, also auch 0 sein; nur würde die Gleichung zu einer niedrigern Ordnung (zu einem niedrigern Grade) gezählt werden müssen, wenn alle Koeffizienten der Glieder der höchsten Dimensionen 0 würden, weil dann alle diese Glieder herausfielen; also nur die der niedrigern Dimensionen noch vorhanden wären.

Sind in einer höhern Gleichung, die nach dem Unbekannten x vom m^{ten} Grade ist, alle Koeffizienten $= 0$, bis auf den von x^m und den letztern, so daß sie auf die Form gebracht werden kann

$$x^m = a,$$

so heißt sie eine reine höhere Gleichung vom m^{ten} Grade.

Hat man endlich die Ausdrücke gefunden, welche statt der Unbekannten x, y, 2c. 2c. in die Gleichungen gesetzt, solche zu wahren, richtigen, d. h. identischen Gleichungen machen, so sagt man: „die Gleichungen wären aufgelöst." — Und die Gleichungen haben eine oder mehrere Auflösungen, je nachdem für

jeden Unbekannten nur ein einziger, oder mehrere einander nicht gleiche Ausdrücke existiren, welche die Eigenschaft haben, daß sie, statt der Unbekannten gesetzt, die Gleichungen zu identischen machen.

Die Lehre von dem Ordnen und Auflösen der Bestimmungs-Gleichungen wird Algebra genannt.

§. 98.

Was nun das Ordnen der Gleichungen betrifft, nach einem, oder nach mehreren Unbekannten, so verfährt man dabei wie folgt:

1) Man multiplicirt beide Seiten der Gleichung so lange mit den einzelnen in ihr vorkommenden Divisoren, oder mit dem Produkt zweier, mehrerer oder aller derselben, oder mit dem (nach Kap. VI. NN. 30. u. 3. zu findenden) General-Divisor oder General-Nenner der vorkommenden Quotienten oder Brüche, bis man eine Gleichung hat, in welcher Division nicht mehr vorkommt.

2) Hierauf löst man alle Klammern auf, um z. B. das Produkt $(3-2x)x$ in die algebraische Summe $3x-2x^2$, oder das Produkt $(3-2x)(1+x)$ in die algebraische Summe $3+x-2x^2$ zu verwandeln; bis zuletzt Klammern entweder gar nicht vorkommen, oder doch in den Klammern ein Unbekannter sich nicht befindet.

3) Dann läßt man alle einzelnen Glieder auf der einen Seite weg, schreibt 0 an Stelle dieser Seite, dieselben Glieder aber, jedoch jedes mit dem entgegengesetzten Vorzeichen, zu den Gliedern der andern Seite hinzu *).

4) Hierauf faßt man alle Glieder in eines zusammen, welche mit demselben Unbekannten in derselben Potenz, oder mit demselben Produkt derselben Potenzen der Unbekannten afficirt

---

*) Dadurch hat man nämlich diese Glieder auf beiden Seiten subtrahirt, und deshalb ist die neue Gleichung wieder eine richtige (S. §. 28. N. 3.).

(versehen) sind; und schreibt man zuletzt alle diese zusammengefaßten Glieder nach den Potenzen oder nach der Summe der Exponenten (nach den Dimensionen) geordnet, steigend oder fallend, so ist das Ordnen der Gleichung nach den angegebenen Unbekannten vollendet.

Beispiel 1. Die Gleichung

1) $$\frac{a}{x}+\frac{b}{2x}+\frac{c}{6x}-1=d$$

giebt, wenn sie zuerst mit x multiplicirt wird,

2) $$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{6}-x=dx;$$

diese mit 2 multiplicirt, giebt

3) $$2a+b+\frac{c}{3}-2x=2dx.$$

Multiplicirt man hierauf mit 3, so ergiebt sich

4) $$6a+3b+c-6x=6dx.$$

Die N. 1. der Vorschrift ist nun erledigt. Man konnte aber schneller zum Ziele kommen, wenn man die Gleichung 1.) sogleich mit 2x multiplicirt hätte; man würde dann die Gleichung 3.) mit Uebergehung der 2.) erhalten haben. — Und noch schneller, nämlich auf einmal, würde man zur Gleichung 4.) gelangt sein, wenn man die 1.) sogleich mit 6x multiplicirt hätte.

Die N. 2. der Vorschrift kann hier nicht angewandt werden, weil Klammern nicht hier sind. Nach der N. 3. der Vorschrift bekommt man aber jetzt aus der Gleichung 4.) sogleich diese

5) $$0=6dx+6x-6a-3b-c$$

und diese Gleichung giebt nach der letzten Nummer der Vorschrift jetzt sogleich

6) $$0=(6d+6)\cdot x-(6a+3b+c)$$

oder $$(6d+6)x=6a+3b+c,$$

als die nach x geordnete Gleichung. — Sie hat die Form N. 1.

des §. 96. I. 1. und ist daher (nach x) eine algebraische Gleichung vom 1ten Grade, die man auch eine einfache Gleichung nennt.

Beispiel 2. Soll die Gleichung

$$1) \qquad \frac{2}{3-x}-5=\frac{4}{2+x}$$

nach x geordnet werden, so erhält man, wenn mit dem Produkt der Nenner, nämlich mit $(3-x)(2+x)$ auf einmal multiplicirt wird, zunächst

$$2) \qquad 2(2+x)-5(3-x)(2+x)=4(3-x);$$

und wenn man jetzt die Klammern auflöst (nach N. 2. der Vorschrift):

$$3) \qquad 4+2x-[30+5x-5x^2]=12-4x;$$

und wenn auch diese neue Klammer wieder aufgelöst wird:

$$4) \qquad 4+2x-30-5x+5x^2=12-4x.$$

Hierauf erhält man (nach N. 3. der Vorschrift)

$$5) \qquad 4+2x-30-5x+5x^2-12+4x=0.$$

Endlich giebt die letzte Nummer der Vorschrift die Gleichung

$$6) \qquad 5x^2+x-38=0,$$

und dies ist die (nach x) geordnete Gleichung. Sie hat die Form N. 2. des §. 96. I. 1. und ist daher (nach dem Unbekannten x) eine quadratische Gleichung oder eine Gleichung vom 2ten Grade.

Beispiel 3. Soll die Gleichung

$$1) \qquad 2x=\frac{4}{3x+y}-5+3y$$

nach den beiden Unbekannten x und y geordnet werden, so multiplicirt man zunächst und zwar mit $3x+y$, und man erhält:

$$2) \qquad 2x(3x+y)=4-5(3x+y)+3y(3x+y).$$

Hierauf erhält man (nach N. 2. der Vorschrift)

$$3) \qquad 6x^2+2xy=4-15x-5y+9xy+3y^2;$$

nun aber (nach N. 3. der Vorschrift)

4) $6x^2+2xy-4+15x+5y-9xy-3y^2=0$

und jetzt (nach N. 4. der Vorschrift)

5) $6x^2-7xy-3y^2+15x+5y-4=0,$

und dies ist nun die (nach x und y) geordnete Gleichung. — Sie ist von der 2ten Dimension, hat alle 3 Glieder der 2ten Dimension (nämlich $6x^2$, $-7xy$, $-3y^2$) und alle Glieder der ersten Dimension (nämlich $15x$ und $5y$), endlich auch das von den Unbekannten unabhängige Glied (der 0ten Dimension) *).

Wollte man diese Gleichung bloß nach x ordnen, d. h. als eine Gleichung ansehen, in welcher x der einzige Unbekannte ist, y also ein bloßer Träger der Operationszeichen, der gar keine bestimmte Bedeutung hat und eben deshalb wiederum jeden denkbaren Ausdruck vorstellen kann, — so würde man aus 5.) sofort erhalten

6) $6x^2+(-7y+15)\cdot x+(-3y^2+5y-4)=0$

und diese Gleichung ist, wie man sieht, nach x eine Gleichung vom 2ten Grade, die man auch eine quadratische nennt.

Dieselbe Gleichung, wenn sie nach dem einzigen Unbekannten y geordnet werden soll (d. h. wenn man in ihr um die Bedeutung von x sich gar nicht kümmert), nimmt dagegen (aus 5.) die folgende Form an, nämlich

7) $-3y^2-(7x-5)\cdot y+(6x^2+15x-4)=0$

oder, wenn man die Gleichung mit -1 multiplicirt, d. h. wenn man sich alle Glieder auf die andere Seite gebracht denkt,

8) $3y^2+(7x-5)\cdot y-(6x^2+15x-4)=0.$

---

*) Der Anfänger muß sich in sehr vielen Beispielen üben, um nach und nach die Rechnungsfehler gänzlich vermeiden zu lernen, sonst aber hat die Ausführung der gegebenen Vorschrift nie die geringste Schwierigkeit. Uebung im Ordnen der Gleichungen gewähren übrigens die folgenden Paragraphen, welche vom Auflösen der Gleichungen handeln, noch in weiterem Umfange.

Beispiel 4. Wäre die Gleichung

1) $$\frac{p}{4qx}-\frac{r}{8aq}+\frac{b}{3(a^2-ax)}-\frac{t}{ax-x^2}=0$$

nach dem Unbekannten x zu ordnen, so würde man eben sowohl nach und nach die einzelnen Brüche wegschaffen können, indem man nach und nach mit den einzelnen der vorkommenden Divisoren multiplicirt, als dieselben auch auf einmal wegschaffen, indem man mit dem, in der N. 30. des Kap. VI. gerade für dieses Beispiel gefundenen General-Divisor $24aqx(a-x)$ multiplicirt. Man erhält dann sogleich:

2) $$6ap(a-x)-3rx(a-x)+8bqx-24aqt=0,$$

und dann

3) $$6a^2p-6apx-3arx+3rx^2+8bqx-24aqt=0,$$

so wie jetzt

4) $$3rx^2+(8bq-6ap-3ar)\cdot x+(6a^2p-24aqt)=0,$$

so daß die Gleichung (nach x) als eine quadratische erscheint.

Hätte man die 1.) zuerst mit $ax-x^2$ multiplicirt, so hätte man zunächst erhalten

2′) $$\frac{ap-px}{4q}-\frac{arx-rx^2}{8aq}+\frac{bx}{3a}-t=0.$$

Multiplicirte man nun mit $8aq$, so erhielte man

3′) $$2a^2p-2apx-arx+rx^2+\frac{8bqx}{3}-8aqt=0.$$

Zuletzt, wenn noch mit 3 multiplicirt wird, erhält man wieder die 3.).

Anmerkg. 1. Wenn man bei dem Ordnen der Gleichungen nach irgend einem Unbekannten, die Brüche nicht auf einmal wegschafft (durch Multiplikation mit dem General-Nenner oder General-Divisor der NN. 3. und 30. des Kap. VI.), sondern nur nach und nach durch Multiplikation mit den einzelnen Nennern oder Divisoren, so wird man wohl thun vor jeder neuen Mul-

tiplikation erst die Glieder der zu multiplicirenden Gleichung möglichst zusammen zu fassen, zu welchem Behufe man sie wohl auch auf der einen Seite wegnimmt und sie auf die andere Seite der Gleichung hinschreibt, aber dann mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Wäre z. B. nach z zu ordnen die Gleichung

$$1)\qquad 4-\frac{2z-1}{3z-2}=3z-\frac{2-3z}{2z+3},$$

so könnte man zuerst mit $3z-2$ multipliciren und erhalten

$$2)\qquad 12z-8-2z+1=9z^2-6z-\frac{-4+12z-9z^2}{2z+3}.$$

Faßt man nun hier, bevor weiter mit $2z+3$ multiplicirt wird, vorher erst die Glieder zusammen, so erhält man

$$3)\qquad -7=9z^2-16z-\frac{-4+12z-9z^2}{2z+3};$$

und, wenn nun mit $2z+3$ multiplicirt wird,

$$4)\qquad -14z-21=18z^3+27z^2-32z^2-48z+4-12z+9z^2$$

und hieraus

$$5)\qquad 18z^3+4z^2-46z+25=0.$$

Dabei ist die Gleichung (nach z) eine kubische, d. h. eine Gleichung vom dritten Grade.

Anmerkg. 2. Zuweilen fällt der Buchstabe x, nach welchem die Gleichung geordnet werden soll, ganz heraus. Dies ist ein Beweis, daß die Gleichung von jeder besonderen Bedeutung von x, ganz unabhängig, also eine Bestimmungsgleichung nach x, nicht ist; sie ist nach x identisch.

Soll z. B. die Gleichung

$$max+mb\cdot\frac{c-ax}{b}=mc$$

nach x geordnet werden, so erhält man, wenn mit b wegmultiplicirt wird,

$$mabx+mb(c-ax) = mbc$$

und dies giebt

$$mbc = mbc,$$

welche (an sich und auch) nach x identisch ist.

Auch die Gleichung §. 37. N. 35., nämlich

$$\frac{A}{B} = x + \frac{A-Bx}{B},$$

wenn sie nach x geordnet werden soll, giebt, sobald man deshalb mit B multiplicirt,

$$A = A$$

und dies zeigt, daß sie nach x eine Bestimmungsgleichung nicht ist, sondern für jeden Werth, d. h. unabhängig von der Bedeutung von x, gilt.

Sollte die Gleichung

1) $$\frac{a}{b} = x-c+\frac{d-bx}{b}$$

nach x geordnet werden, so würde man erhalten, wenn zunächst mit b multiplicirt wird,

2) $$a = bx-bc+d-bx,$$

dann

3) $$a = -bc+d.$$

Diese Gleichung 3.) ist nun zwar an sich nicht identisch, aber sie ist (und mit ihr die gegebene Gleichung 1.) nach x identisch; d. h. sie ist unabhängig von jeder besonderen Bedeutung von x. — Die Gleichung 3.) dagegen ist nur dann richtig (also an sich identisch), wenn einer der 4 Buchstaben, a, b, c oder d einen bestimmten, noch unbekannten Ausdruck vorstellt und dieser statt desselben Buchstaben gesetzt wird. Sie wird nämlich identisch, wenn

$-bc+d$ statt a,

oder $a+bc$ statt d,

oder $\frac{d-a}{b}$ statt c,

oder $\frac{d-a}{c}$ statt b

gesetzt wird, je nachdem man in ihr a, d, c oder b als den Unbekannten ansieht. — Sie wird nämlich in jedem Falle eine von den 4 Gleichungen:

$$-bc+d=-bc+d,$$

oder $$a=-bc+a+bc,$$

oder $$a=-\frac{d-a}{c}\cdot c+d,$$

oder $$a=-b\cdot\frac{d-a}{b}+d,$$

während jede derselben eine an sich richtige (also eine identische) Gleichung ist.

Zweite Abtheilung.

Auflösung der einfachen algebraischen Gleichungen mit einem oder mit mehreren Unbekannten.

§. 99.

Soll die einfache algebraische Gleichung

1) $$ax+b=0$$

nach dem Unbekannten x aufgelöst werden, so schaffe man zuerst b auf die andere Seite; — dies giebt

2) $$ax=-b$$

und dividire dann, wenn a nicht Null ist (S. §§. 35. 36.) durch a auf beiden Seiten und man hat

3) $$x=\frac{-b}{a}=-\frac{b}{a}.$$

Da nun diese letztere Gleichung offenbar eine richtige (identische) wird, wenn man statt x den Ausdruck setzt, der auf der andern Seite steht, weil sie dann in

$$-\frac{b}{a} = -\frac{b}{a}$$

übergeht, und da die Gleichungen 2.) und 1.) rückwärts aus der 3.) wieder hervorgehen, wenn man beide Seiten derselben, multiplicirt, wo vorher dividirt worden, oder $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, wo vorher $\left\{\begin{matrix}\text{subtrahirt}\\ \text{addirt}\end{matrix}\right\}$ worden ist, so folgt, daß mit der Gleichung 3.) auch die Gleichung 1.) eine richtige (identische) Gleichung sein muß, also wenn $-\frac{b}{a}$ statt x gesetzt wird.

Ist aber $a = 0$, so darf man nicht mit a dividiren (§. 36.), sondern man muß diesen besonderen Fall von der Gleichung 2.) ab, besonders behandeln. — Ist aber $a = 0$, so ist auch $a \cdot x = 0 \cdot x = 0$ und die Gleichung 2.) enthält jetzt x gar nicht mehr, weil sie nun in

$$4) \qquad 0 = b$$

übergeht; sie ist nach x identisch, d. h. sie ist unabhängig von jeder bestimmten Bedeutung, die man dem x noch geben könnte. Die Gleichung 4.) ist an sich identisch, wenn auch statt b Null gesetzt wird; außerdem aber enthält sie einen Widerspruch (so lange b etwas anderes als Null ist), und dieser Widerspruch würde anzeigen, daß die Voraussetzungen, welche zu dieser Gleichung geführt haben, bereits einen Widerspruch in sich schließen.

Wollte man statt x das in der Gleichung 3.) gefundene allgemeine Resultat

$$\frac{-b}{a} \text{ oder } -\frac{b}{a}$$

auch jetzt noch gelten lassen, so würde solches im Falle keines

Widerspruches die Form $\frac{0}{0}$, im Falle eines Widerspruchs aber, wenn man noch Zähler und Nenner (d. h. Dividend und Divisor) mit $-b$ dividirte, auf die Form $\frac{1}{0}$ gebracht werden können. Das Resultat $x = \frac{0}{0}$ würde also anzeigen, daß die vorliegende Gleichung 1.) nicht hindere, daß x jeden Werth haben könne, während $x = -\frac{b}{0} = \frac{1}{0}$ anzeigt, daß die Aufgabe einen Widerspruch enthalte und daß kein Werth von x existire, der ihr genügen könnte, wie solches bereits §. 36. aus einander gesetzt sich findet.

Anmerkg. 1. Man muß jedoch nicht übersehen, daß a von der Form $a_1(p-q)$ und zu gleicher Zeit b von der Form $b_1(p-q)$ sein kann; oder mit andern Worten, daß die Gleichung $ax+b=0$ dadurch entstanden sein kann, daß man eine andere $a_1x+b_1=0$, mit $p-q$ multiplicirt hat, so daß sie in $a_1(p-q)x+b_1(p-q)=0$ d. h. $(a_1p-a_1q)x+b_1p-b_1q=0$ d. h. in $a \cdot x+b=0$

übergegangen ist, indem man a_1p-a_1q durch a, und $b_1 \cdot p-b_1 \cdot q$ durch b bezeichnete. Nachgehends konnte für specielle Werthe von p und q, die Differenz $p-q$ Null geworden sein, so daß auch $a=0$ und $b=0$ wurden, weil sie den Faktor $p-q$ (jetzt Null) enthielten. — Dann bleibt zwar immer noch wahr, daß die Gleichung

$$ax+b=0$$

identisch wird, man mag statt x setzen, was man nur immer will; aber man kann sich doch nebenher auch fragen, durch welchen Werth von x die erstere Gleichung

$$a_1x+b_1=0$$

identisch wird, diejenige nämlich, welche aus der gegebenen hervorgegangen sein würde, wenn man den, den Koeffizienten a

und b gemeinschaftlichen Faktor $p-q$, zeitig genug, d. h. noch ehe er 0 geworden ist, bemerkt, und durch ihn die Gleichung $ax+b$ wegdividirt hätte. Und für diesen Fall findet man $x=\frac{b_1}{a_1}$, welchen Werth jedoch der vorige Ausdruck

$$x=-\frac{b}{a}=-\frac{b_1(p-q)}{a_1(p-q)}=\frac{0}{0}$$

ebenfalls geliefert hätte, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor $p-q$, der jetzt Null geworden war, aufgesucht, und Zähler und Nenner von $\frac{b}{a}$ durch ihn wegdividirt hätte.

In diesem Sinne, und nur in diesem, kann man daher zuweilen nach den wahren Werthen solcher Quotienten fragen, welche in speziellen Fällen die Form $\frac{0}{0}$ angenommen haben.

Anmerkung 2. In dem Falle, daß in der Gleichung $ax=b$, welche die Auflösung $x=\frac{b}{a}$ hat, a seiner Natur nach nothwendig reell ist und nach und nach vom positiven durch Null zum negativen übergeht, während b ebenfalls reell ist, aber denselben Werth behält, so wird, abgesehen vom (+ oder −) Zeichen, der Quotient $\frac{b}{a}$ immer größer, je kleiner a wird: ja, wenn $a=\frac{1}{10^m}$, so ist $\frac{b}{a}=b:\frac{1}{10^m}=b\cdot 10^m$, so daß also, während a dem Werthe 0 immer näher rückt, der Quotient $\frac{b}{a}$ jede gegebene Größe erreichen und übersteigen kann. In diesem Sinne, aber auch nur in diesem, kann man sagen: „x oder $\frac{b}{a}$ würde unendlich groß", d. h. aber, der Unbekannte x wird nach und nach immer größer und kann zuletzt jede gegebene Größe erreichen und übersteigen, je kleiner nach und nach der Nenner a gedacht wird, und je weni-

ger dieser Nenner von 0 (Null) verschieden ist. — Immer kann der Nenner nicht genau und völlig Null gedacht werden, weil man dann nicht mehr durch ihn wegdividiren durfte (§. 36.).

Uebungs-Beispiele.

In den nachstehenden Beispielen wollen wir in einigen der gegebenen Gleichungen nach und nach jeden in ihr vorkommenden Buchstaben als den Unbekannten ansehen und sie nach demselben auflösen, wenn sie in Bezug auf denselben noch eine einfache (vom ersten Grade) ist. — Die Gleichung $3x-2z+2xz-z^2=8$ z. B. würde nämlich nach x geordnet diese:

$(2z+3)x = z^2+2z+8$ und eine einfache sein,

während sie nach z geordnet, diese:

$z^2+(2-2x)\cdot z+(8-3x) = 0$ und quadratisch ist.

1) Aus $c-ax = d-bx$ folgt $x = \frac{c-d}{a-b} = \frac{d-c}{b-a}$,

und $a = \frac{c-d+bx}{x}$, und $b = \frac{d-c+ax}{x}$.

2) Aus $-x = a+\frac{bc}{d}-\frac{cfx}{de}$ folgt $x = \frac{(ad+bc)e}{cf-de}$,

und $d = \frac{cfx-bce}{ex+ae}$, und $c = \frac{ade+dex}{fx-be}$.

3) Aus $\frac{ax}{b}-cx-d = a-\frac{bx}{a}-\frac{5x}{2a}+\frac{x}{3b}$

folgt $x = \frac{6ab(a+d)}{6a^2-6abc+6b^2-2a+15b}$.

4) Aus $\frac{ffx}{cg}-\frac{aa}{f}+cx = \frac{hx}{g}-c+(a+c)x$

folgt $x = \frac{(aa-cf)cg}{(ff-ch-acg)f}$.

5) Aus $\frac{cx}{c-dx}-\frac{c+bcx}{a-bx} = c-\frac{d-cx}{c-dx}$

folgt $x = \frac{(a+1)cc-ad}{[(a+1)c-b]\cdot d}$.

6) Aus $\frac{d}{c-dx} - c\frac{1+bx}{a-bx} = c$ folgt $x = \frac{(a+1)cc-ad}{[(a+1)c-b]d}$.

7) Aus $u = a+(n-1)d$

folgt $a = u-(n-1)d$; $d = \frac{u-a}{n-1}$ und $n = \frac{u-a}{d}+1$.

8) Aus $s = \frac{a+u}{2} \cdot n$

folgt $n = \frac{2s}{a+u}$; $a = \frac{2s-nu}{n}$ und $u = \frac{2s-na}{n}$.

9) Aus $s = [2a+(n-1)d] \cdot \frac{n}{2}$

folgt $d = \frac{2s-2an}{n(n-1)}$ und $a = \frac{2s-n(n-1)d}{2n}$;

und nach n geordnet wird sie

$$n^2+(2a-d) \cdot n-2s = 0,$$

so daß die Auffindung des Ausdrucks, welcher für n gesetzt werden muß, wenn die gegebene Gleichung

$s = [2a+(n-1)d] \cdot \frac{n}{2}$ richtig sein soll, was auch s, a, d vorstellen mögen, einem späteren Kapitel überlassen bleiben muß.

10) Aus $\frac{1}{x} = bc+d+\frac{ab}{x}$ folgt $x = \frac{1-ab}{bc+d}$.

11) Aus $cd-\frac{aax}{b-c}+bx+ac = 0$ folgt $x = \frac{c(a+d)(b-c)}{aa-b(b-c)}$.

12) Aus $c = a+\frac{m(a+x)}{3a-x}$ folgt $x = \frac{a(3c-3a-m)}{c+m-a}$.

13) Aus $-\frac{a(dd+xx)}{dx} = ac-\frac{ax}{d}$ folgt $x = -\frac{d}{c}$.

14) Aus $x+y = axy$ folgt $x = \frac{y}{ay-1}$; $y = \frac{x}{ax-1}$.

15) Aus $x-z = bxyz$

folgt $x = \frac{z}{1-byz}$; $z = \frac{x}{1+bxy}$ und $y = \frac{x-z}{bxz}$.

16) Aus $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a$ folgt $x=\frac{y}{ay-1}$ und $y=\frac{x}{ax-1}$.

17) Aus $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=a$ folgt $x=\frac{y}{ay+1}$ und $y=\frac{x}{1-ax}$.

Der Anfänger, welcher diese Gleichungen nach den verschiedenen als unbekannt gedachten Buchstaben auflösen will, vergesse nur nicht, daß dieselben vorher nach demselben Buchstaben (genau nach der Vorschrift des §. 98.) geordnet werden müssen. Dann wird das Auflösen selbst nie Schwierigkeiten machen.

18) Wird der Ausdruck x gesucht, welcher die Eigenschaft hat, daß, wenn man ihn mit a, dann denselben auch mit b multiplicirt, das letztere Produkt bx, nebst x selbst, von dem erstern ax subtrahirt, dann die Differenz ax—bx—x durch x dividirt, zuletzt die Zahl c sich ergiebt, so hat man die Gleichung

$$\frac{ax-bx-x}{x}=c,$$

welche in $ax-bx-x=cx,$

d. h. in $(a-b-1-c)x=0$

übergeht, und

$$x=\frac{0}{a-b-1-c}$$

liefert. — Ist nun nicht $a-b-1-c=0$ gegeben, so wird $x=0$; und dieser Ausdruck genügt der Gleichung $ax-bx-x=cx$, weil sie dann in $(a-b-1)\cdot x=c\cdot x$, also in $0=0$ übergeht.

Nicht aber genügt der Werth $x=0$ der gegebenen Gleichung

$$\frac{ax-bx-x}{x}=c$$

selbst, weil dann Null im Nenner vorkommt, und solche Ausdrücke nirgends betrachtet werden dürfen, d. h. als den allgemeinen Gesetzen der Operationen nicht unterworfen angesehen worden sind. — Ist aber $a-b-1-c=0$, so zeigt das Re-

sultat $x = \frac{0}{0}$ nun an, daß man vorher $0 \cdot x = 0$ hatte, also selbst schon eine richtige Gleichung; also daß solche richtig verbleibt, man mag für x setzen, was man nur immer will.

19) Wäre der Ausdruck x gesucht, welcher 0 gibt, wenn a durch ihn dividirt wird, so hätte man $\frac{a}{x} = 0$, $a = 0 \cdot x$, $a = 0$, oder, wenn man mit dem Koeffizienten 0 dividirt hätte, dem §. 36. entgegen, $x = \frac{a}{0}$; und dieses Resultat zeigt an, daß unter der Voraussetzung, daß a selbst nicht Null ist, ein solcher Ausdruck x nicht existirt.

Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten.

§. 100. Aufgabe.

Die beiden einfachen Gleichungen

$$1) \qquad ax + by = c$$

$$2) \qquad a_1 x + b_1 y = c_1,$$

nach den beiden Unbekannten x und y aufzulösen.

Auflösung. Man löse eine der beiden Gleichungen z. B. die erste, nach x auf, d. h. man finde einen Ausdruck (der auch noch y enthalten wird und), welcher statt x in die Gleichung 1. gesetzt, solche identisch macht; und man findet hier

$$3) \qquad x = \frac{c - by}{a}.$$

Da nun, was man auch statt y setzen mag, wenn $\frac{c-by}{a}$ statt x gesetzt wird, die erste Gleichung immer identisch wird, die zweite aber dadurch in

$$4) \qquad a_1 \cdot \frac{c - by}{a} + b_1 y = c_1$$

übergeht, so muß diese ebenfalls noch identisch gemacht werden. — Also muß man diese noch nach y auflösen.

Ordnet man sie aber nach Anleitung des §. 98.), so erhält man, mit a wegmultiplicirend:

$$-a_1b\cdot y+ab_1\cdot y = ac_1-a_1c;$$

und dann: $(ab_1-a_1b)\cdot y = ac_1-a_1c$,

woraus die Auflösung

$$5)\qquad y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}=\frac{a_1c-ac_1}{a_1b-ab_1}$$

hervorgeht.

Dieser Werth von y, und der zugehörige $x=\frac{c-by}{a}$ d. h.

$$6)\qquad x=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b}=\frac{bc_1-b_1c}{a_1b-ab_1}\ *)$$

machen also beide Gleichungen 1. und 2.) identisch, sind demnach die gesuchten Werthe von x und von y.

§. 101.

So lange nicht der Divisor $ab_1-a_1b=a_1b-ab_1=0$ ist, haben die beiden gegebenen Gleichungen 1. u. 2. des §. 100. allemal eine Auflösung nach x und nach y, und dann aber auch nur eine einzige.

Denn jeder Werth α von x, der mit einem Werth β von y, die beiden gegebenen Gleichungen 1. 2. §. 100. identisch macht, macht auch alle aus ihnen abgeleiteten Gleichungen, mithin auch die Gleichungen 5. und 6. des §. 100. identisch, so daß also α kein anderer Werth von x sein kann, als der oben gefundene,

---

*) Es ist nämlich

$$by=\frac{abc_1-a_1bc}{ab_1-a_1b},\qquad c-by=\frac{ab_1c-abc_1}{ab_1-a_1b};$$

und daraus

$$x=\frac{c-by}{a}=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b};$$

und wenn man dieses Quotienten Dividend und Divisor zugleich mit −1 multiplicirt, so erhält man nach (§. 37. N. 28.) auch den andern Ausdruck.

und β kein anderer Werth von y, als der für ihn bereits gefundene.

§. 102.

Ist dagegen der Divisor $ab_1 - a_1 b = 0$ oder $a_1 = \frac{ab_1}{b}$, so sind die beiden gegebenen Gleichungen jetzt folgende:

$$ax + by = c,$$

$$\frac{ab_1}{b}x + b_1 y = c_1;$$

oder, wenn man die zweite mit b multiplicirt, und durch b_1 dividirt, folgende:

$$1) \qquad ax + by = c,$$

$$2) \qquad ax + by = \frac{bc_1}{b_1};$$

und es sind nun zwei Fälle möglich. Entweder es ist $c = \frac{bc_1}{b_1}$ d. h. $b_1 c - bc_1 = 0 = bc_1 - b_1 c$; oder es findet diese letztere Annahme nicht statt.

Im erstern Falle ist auch

$a_1 c - ac_1 = \frac{ab_1 c}{b} - ac_1 = \frac{a}{b}(b_1 c - bc_1) = 0$; im andern Falle nicht.

Unter der erstern Voraussetzung fallen die beiden gegebenen Gleichungen in eine einzige zusammen, und ihr wird genügt, wenn $x = \frac{c - by}{a}$, dagegen y ganz willkürlich genommen wird; — also auf unendlich viele verschiedene Arten. — Im andern Falle enthalten die beiden Gleichungen einen Widerspruch, weil sie, wenn man die eine von der andern subtrahirt, $c - \frac{bc_1}{b_1} = 0$, d. h. $b_1 c - bc_1 = 0$ geben, d. h. etwas $= 0$ geben, was nach der Voraussetzung nicht Null ist.

So oft also die allgemeinen Auflösungen

$$y = \frac{ac_1 - a_1c}{ab_1 - a_1b} \quad \text{und} \quad x = \frac{b_1c - bc_1}{ab_1 - a_1b}$$

die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so oft fallen beide gegebene Gleichungen in eine einzige zusammen, welche auf unendlich viele Arten identisch wird. So oft aber einer dieser beiden allgemeinen Werthe von x und y die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, so oft enthalten die beiden gegebenen Gleichungen einen Widerspruch, welcher durch keinen Werth von x oder y gehoben werden kann.

Anmerkung. Doch muß man auch hier die Anmerkung 2. des §. 99. beherzigen.

§. 103.

Weil aber bei den gegebenen einfachen Gleichungen

$$1) \quad ax + by = c,$$

$$2) \quad a_1x + b_1y = c_1,$$

nur eine einzige Auflösung stattfindet, so wird derselbe Werth eines der Unbekannten aus jeder Gleichung gefunden, welche den andern Unbekannten nicht mehr enthält, mag solche aus den gegebenen Gleichungen irgend wie hervorgegangen sein. — Daher wird man dieselbe Auflösung der beiden gegebenen Gleichungen überhaupt erzielen

1) wenn man aus ihnen eine neue Gleichung ableitet, welche einen der Unbekannten z. B. x nicht mehr enthält, d. h. wenn man x aus ihnen wegschafft oder eliminirt;
2) wenn man diese neue Gleichung (die Eliminationsgleichung genannt) nach dem andern Unbekannten y auflöst;
3) wenn man den so gefundenen Werth von y, in irgend eine der gegebenen oder der aus ihnen hervorgegangenen Glei-

chungen, die aber noch x enthält, statt y setzt, und die so entstehende Gleichung vollends nach x auflöst.

§. 104.

Unter den Methoden, aus zweien einfachen Gleichungen

$$1)\qquad a\cdot x + b\cdot y = c$$

und

$$2)\qquad a_1\cdot x + b_1\cdot y = c_1$$

einen der Unbekannten z. B. x zu eliminiren (d. h. wegzuschaffen), zeichnen sich vorzüglich folgende viere aus:

1) Die Substitutions-Methode. Sie besteht darin, daß man aus der einen der gegebenen Gleichungen, x findet in y ausgedrückt, und diesen Werth statt x in die zweite der gegebenen Gleichungen setzt.

So findet sich (aus 1.):

$$x = \frac{c-by}{a},$$

und dies (in 2.) statt x gesetzt, giebt:

$$a_1\frac{c-by}{a} + b_1 y = c_1,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

2) Die Kombinations-Methode. Sie besteht darin, daß man x aus beiden Gleichungen findet in y ausgedrückt, und diese beiden Ausdrücke einander gleich setzt.

So giebt sich

aus 1.) ... $x = \frac{c-by}{a}$,

und aus 2.) ... $x = \frac{c_1-b_1 y}{a_1}$;

und es ist also

$$\frac{c-by}{a} = \frac{c_1-b_1 y}{a_1}$$

die gesuchte Eliminationsgleichung.

3) Die englische Methode. Sie besteht darin, daß man jede der gegebenen Gleichungen mit einer Zahl multiplicirt, diese Zahl aber so wählt, daß die neuen Gleichungen den Unbekannten y mit einerlei Koeffizienten versehen, enthalten. Dann werden diese neuen Gleichungen zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, je nachdem durch das eine oder das andere dieser Unbekannte y herausfällt.

So multiplicirt man die erste Gleichung mit a_1, die andere mit a, und erhält

$$aa_1x+a_1by=a_1c$$

und $$aa_1x+ab_1y=ac_1.$$

Und diese von einander subtrahirt, geben:

$$(a_1b-ab_1)y=a_1c-ac_1,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Die Zahlen, womit jede Gleichung multiplicirt werden muß, findet man aber jedesmal, wenn man von den beiden Koeffizienten von x, nämlich a und a_1, das gemeinschaftliche Vielfache sucht (hier aa_1), und dann mit jedem dieser Koeffizienten a oder a_1 in dieses Vielfache (aa_1) dividirt, ganz ähnlich dem Verfahren, wodurch Brüche unter einerlei Benennung gebracht werden.

4) Die französische Methode. Sie besteht darin, daß man nur eine der gegebenen Gleichungen mit einem noch ganz unbestimmten Ausdruck α multiplicirt, die neue Gleichung zur andern addirt, und dann, da für α jedweder Werth genommen werden kann, den Werth von α so nimmt, daß der Koeffizient von x in der zuletzt erhaltenen Gleichung 0 wird, also das mit x affizirte Glied herausfallen muß.

Multiplicirt man also die zweite Gleichung mit α und addirt sie zur ersten, so erhält man

$$(a_1\alpha+a)\cdot x+(b_1\alpha+b)\cdot y=c_1\alpha+c.$$

Und nimmt man hier α so, daß

$$a_1\alpha+a=0 \quad \text{d. h.} \quad \alpha=-\frac{a}{a_1} \quad \text{wird,}$$

so hat man

$$\left[b_1\left(-\frac{a}{a_1}\right)+b\right]\cdot y = c\cdot\left(-\frac{a}{a_1}\right)+c,$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Man kann diese französische Methode auch dahin abändern, daß man jede der beiden gegebenen Gleichungen mit einem noch ganz unbestimmten und einstweilen bezüglich durch p und q bezeichneten Ausdruck multiplicirt und dann beide neue Gleichungen addirt, so daß man erhält

1) $(ap+a_1q)\cdot x+(bp+b_1q)\cdot y = cp+c_1q.$

Soll nun x eliminirt oder fortgeschafft werden, so denkt man sich p und q so angenommen, daß der Koeffizient von x der Null gleich wird, also daß wird,

2) $ap+a_1q = 0.$

Weil aber in dieser Gleichung zwei Unbekannte (p und q) vorkommen, so hat man jetzt den Vortheil voraus, daß man über einen derselben z. B. über p nach Belieben disponiren, also ihn auch so annehmen kann, daß die ganze Gleichung sich durch a_1 dividiren läßt, sonach q ohne Bruchform, mithin viel bequemer sich ergiebt. — Nimmt man also für p den einfachsten Werth dieser Art, nämlich a_1 selber an, so giebt die vorstehende Gleichung 2.) zu

3) $p = a_1$ sogleich 4) $q = -a$

dazu, und die 1.) geht dadurch über in

5) $(a_1b-ab_1)\cdot y = a_1c-ac_1,$

welches jetzt die gesuchte Eliminationsgleichung ist.

Jede dieser, auf den vier bis fünf verschiedenen Wegen gefundenen Eliminationsgleichungen ist übrigens eine und dieselbe, wie man sich überzeugt, wenn man jede derselben nach y ordnet; sie nehmen dann alle die Form an wie sie hier vorstehend in der N. 5. zu sehen ist.

Diese Eliminationsgleichung wird nun nach y aufgelöst,

der gefundene Werth in eine der übrigen Gleichungen statt y substituirt und aus der so erhaltenen Gleichung x vollends gefunden.

Auflösung dreier einfachen Gleichungen mit drei Unbekannten.

§. 105.

Es sind gegeben 3 einfache Gleichungen zwischen 3 Unbekannten x, y und z, nämlich

1) $$ax+by+cz=d$$

2) $$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

3) $$a_2x+b_2y+c_2z=d_2;$$

man soll sie nach x, y und z auflösen.

Auflösung und Beweis. Man findet aus der 1ten Gleichung z in x und y ausgedrückt; nämlich

4) $$z=\frac{d-ax-by}{c}.$$

Dieser Werth von z, statt z gesetzt, macht die erste Gleichung identisch; die beiden andern aber gehen dadurch in

$$a_1x+b_1y+c_1\left(\frac{d-ax-by}{c}\right)=d_1,$$

$$a_2x+b_2y+c_2\left(\frac{d-ax-by}{c}\right)=d_2,$$

d. h., wenn man mit c wegmultiplicirt und ordnet,

in 5) $$(a_1c-ac_1)x+(b_1c-bc_1)y=cd_1-c_1d$$

und 6) $$(a_2c-ac_2)x+(b_2c-bc_2)y=cd_2-c_2d$$

über, welche noch durch dazu gehörige Werthe von x und von y, identisch werden müssen. Diese Gleichungen sind also nun nach x und nach y aufzulösen.

Sie geben aber, (nach §§. 100.–104.):

$$x=\frac{(b_2c-bc_2)(cd_1-c_1d)-(b_1c-bc_1)(cd_2-c_2d)}{(a_1c-ac_1)(b_2c-bc_2)-(a_2c-ac_2)(b_1c-bc_1)}$$

$$y = \frac{(a_1c-ac_1)(cd_2-c_2d)-(a_2c-ac_2)(cd_1-c_1d)}{(a_1c-ac_1)(b_2c-bc_2)-(a_2c-ac_2)(b_1c-bc_1)}$$

oder

7) $$x = \frac{db_1c_2-db_2c_1+d_1b_2c-d_1bc_2+d_2bc_1-d_2b_1c}{ab_1c_2-ab_2c_1+a_1b_2c-a_1bc_2+a_2bc_1-a_2b_1c}$$

8) $$y = \frac{ad_1c_2-ad_2c_1+a_1d_2c-a_1dc_2+a_2dc_1-a_2d_1c}{ab_1c_2-ab_2c_1+a_1b_2c-a_1bc_2+a_2bc_1-a_2b_1c}.$$

Für diese Werthe von x und y, geht aber der obige Ausdruck $z = \frac{d-ax-by}{c}$, welcher die erste Gleichung identisch macht, in

9) $$z = \frac{ab_1d_2-ab_2d_1+a_1b_2d-a_1bd_2+a_2bd_1-a_2b_1d}{ab_1c_2-ab_2c_1+a_1b_2c-a_1bc_2+a_2bc_1-a_2b_1c}$$

über; und dies sind also die gesuchten Werthe von x, y und z, welche alle 3 Gleichungen 1—3.) identisch machen. — In diesen Werthen könnte man auch alle Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandeln.

§. 106.

So oft der Nenner dieser Ausdrücke für x, y und z, nämlich

$$ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c$$

nicht Null ist, so oft haben die 3 gegebenen Gleichungen 1.—3.) allemal eine Auflösung, und allemal nur eine einzige.

Denn jeder Werth von x, y, z, für welche die 3 gegebenen Gleichungen 1.—3.) identische sind, macht auch alle aus ihnen hervorgegangenen, also namentlich auch die Gleichungen 7., 8. und 9.) identisch, ist also dem eben gefundenen gleich.

§. 107.

Ist der gedachte Divisor

$$ab_1c_2+a_1b_2c+a_2bc_1-ab_2c_1-a_1bc_2-a_2b_1c$$

der Null gleich, so sind die 3 Dividenden von x, y und z (in 7., 8. und 9.) entweder alle oder keiner der Null gleich, wie

man sich aus §. 102. in Verbindung mit der Auflösungsweise des §. 105. bald überzeugt. — Im erstern Falle, wo 7., 8. u. 9.) in $\frac{0}{0}$ übergehen, fallen die 3 gegebenen Gleichungen in eine einzige oder nur in zweie zusammen, je nachdem nämlich die beiden Eliminationsgleichungen 5. und 6.) für jeden Werth von x und y bereits identisch sind, oder nicht an sich schon identisch, sondern nur nicht wesentlich von einander verschieden sind, also in eine einzige zusammenfallen.

Im andern Falle dagegen, wo von den 3 Dividenden keiner der Null gleich ist, und wo also die 3 Werthe von x, die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, enthalten die 3 Gleichungen einen Widerspruch, so daß es keine Werthe von x, y und z jetzt gibt, welche sie alle dreie zugleich identisch machen könnten.

§. 108.

Und weil diese 3 einfachen Gleichungen abermals nur eine einzige Auflösung zulassen, so erhält man nothwendig dieselben Werthe von x, y, z, man mag die gegebenen Gleichungen 1.—3.) oder irgend welche aus ihnen hervorgegangenen, zu Hilfe nehmen.

Man kann daher außer dem im §. 105.) beschriebenen, noch eine Menge verschiedener Wege betreten, um zur Auflösung der 3 einfachen Gleichungen

1) $ax + by + cz = d$

2) $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

3) $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

zu gelangen.

Man kann nämlich aus den Gleichungen 1. und 2.) dann aus 1. und 3.), endlich auch aus 2. und 3.), nach den Methoden des §. 104., z eliminiren, und man erhält dadurch 3 Gleichungen zwischen x und y, von denen je zweie ausreichen, die

Werthe von x und y zu geben. Und setzt man diese letzteren Werthe dann in irgend eine der Gleichungen, in welcher aber noch z vorkommen muß, statt x und statt y, so findet man aus ihr sogleich noch z dazu.

Man kann aber auch mittelst der französischen Methode, sogleich 2 Unbekannte z. B. x und y, auf einmal eliminiren. Zu dem Behufe multiplicirt man die zweite der gegebenen Gleichungen mit α, die dritte mit β, addirt beide letztern Gleichungen zur ersten, und erhält:

$$4)\qquad (a+\alpha a_1+\beta a_2)x+(b+\alpha b_1+\beta b_2)y+(c+\alpha c_1+\beta c_2)z = (d+\alpha d_1+\beta d_2),$$

wo α und β ganz beliebige Werthe vorstellen können.

Denkt man sich aber die Werthe von α und β so genommen, daß sie die beiden Koeffizienten von x und von y zu Null, d. h.

$$5)\qquad a+a_1\alpha+a_2\beta=0$$

$$6)\qquad b+b_1\alpha+b_2\beta=0$$

machen, so wird obige Gleichung 4.) in

$$7)\qquad (c+\alpha c_1+\beta c_2)\cdot z = d+\alpha d_1+\beta d_2$$

übergehen, wo aber α und β die durch Auflösung der Gleichungen 5. und 6.) sich ergebenden Werthe vorstellen.

Denkt man sich α und β anders und so, daß die Koeffizienten von x und von z (in 4.) Null werden, so hat man

$$8)\qquad (b+\alpha b_1+\beta b_2)\cdot y = d+\alpha d_1+\beta d_2,$$

wo aber α und β die aus den Gleichungen

$$9)\qquad a+a_1\alpha+a_2\beta=0$$

$$10)\qquad c+c_1\alpha+c_2\beta=0$$

hervorgehenden Werthe vorstellen.

Endlich ist offenbar auch noch

$$11)\qquad (a+\alpha a_1+\beta a_2)\cdot x = d+\alpha d_1+\beta d_2,$$

wenn α und β die Werthe vorstellen, welche sich aus der Auflösung der Gleichungen

12) $b+b_1\alpha+b_2\beta=0$

13) $c+c_1\alpha+c_2\beta=0$

für α und für β ergeben.

Anmerkg. 1. Auch hier kann man die französische Methode dahin abändern, daß man die Gleichungen 1., 2. und 3. bezüglich mit p, q, r multiplicirt, — während p, q, r völlig beliebig gedacht werden, — und alle drei Resultate addirt, so daß man erhält:

4) $$(ap+a_1q+a_2r)\cdot x+(bp+b_1q+b_2r)\cdot y+(cp+c_1q+c_2r)\cdot z = dp+d_1q+d_2r,$$

welche Gleichung 4.) mit den Gleichungen 1.–3.) zugleich identisch ist, sobald man unter x, y, z die durch sie vorgestellten bestimmten Werthe versteht, was man auch statt p, q, r setzen möge.

Will man nun eine Gleichung herausholen (aus der 4.), welche weder x noch y enthält, so muß man p, q, r so genommen sich denken, daß die Koeffizienten von x und von y der Null gleich werden. Man hat dann

5) $ap+a_1q+a_2r=0$

6) $bp+b_1q+b_2r=0$

und für die aus 5.) und 6.) hervorgehenden Werthe von p, q und r ist dann noch

7) $(cp+c_1q+c_2r)\cdot z=dp+d_1q+d_2r.$

Weil aber die beiden Gleichungen 5.) und 6.), aus denen p, q, r gefunden werden sollen, einen Unbekannten mehr haben, so kann man über diesen noch nach Belieben disponiren, d. h. man kann ihn, z. B. p, noch beliebig und so annehmen, daß die dazu sich findenden Werthe von q und r ohne Bruchform sich ergeben.

Multiplicirt man nämlich, um aus 5.) und 6.) r zu eliminiren, die 5.) mit b_2, die 6.) aber mit a_2 und subtrahirt man beide Gleichungen von einander, so findet sich

8) $$(ab_2-a_2b)\cdot p+(a_1b_2-a_2b_1)\cdot q=0$$

und nimmt man nun an

9) $$p=a_1b_2-a_2b_1,$$

so findet sich augenblicklich

10) $$q=a_2b-ab_2,$$

also ohne Bruchform dazu. Und dazu findet sich denn

11) $$r=ab_1-a_1b,$$

so daß die Gleichung 7.) nun übergeht in

12) $$[c(a_1b_2-a_2b_1)+c_1(a_2b-ab_2)+c_2(ab_1-a_1b)]\cdot z$$
$$=d(a_1b_2-a_2b_1)+d_1(a_2b-ab_2)+d_2(ab_1-a_1b)$$

und nun sogleich z gerade so liefert, wie oben steht. Gerade so findet man nun aus derselben Gleichung 4.) auch y und x.

Anmerkg. 2. Auch die englische Methode, wenn z allein eliminirt werden soll, kann eine kleine Veränderung in ihrer Anwendung erleiden.

Will man nämlich, wenn aus den 3 Gleichungen

1) $$2x+3y-6z=12,$$

2) $$-x+4y+4z=7,$$

3) $$5x-2y+8z=10,$$

z eliminirt werden soll, nicht direkt nach §. 108. verfahren, und also nicht z zuerst (aus 1. und 2.), dann (aus 1. und 3.) und (aus 2. und 3.) eliminiren, so kann man sogleich das kleinste gemeinschaftliche Vielfache aller 3 Koeffizienten von z aufsuchen, d. h. das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von 6, 4 und 8; (man findet 24); und diese Zahl 24 als den Koeffizienten von z in den 3 neuen Gleichungen ansehen, mit 6, 4 und 8 in 24 dividiren, endlich mit den Quotienten 4, 6, 3 die einzelnen der gegebenen Gleichungen bezüglich multipliciren; und man erhält dann:

4) $8x+12y-24z=48$

5) $-6x+24y+24z=42$

6) $15x-6y+24z=30.$

Und nun kann man 4. und 5.) oder 4. und 6.) addiren oder 6. und 5.) von einander subtrahiren, und erhält

7) $2x+36y=90$

8) $23x+6y=78$

9) $-21x+30y=12$, oder $-7x+10y=4$,

von welchen 3 Gleichungen irgend zweie ausreichen um x und y zu finden.

§. 109.

Es ist übrigens nun sehr leicht einzusehen, wie verfahren werden müsse, um n einfache Gleichungen zwischen n Unbekannten nach den letztern aufzulösen. — Dabei folgt noch allemal:

1) So lange der Divisor in den für die Unbekannten gefundenen allgemeinen Ausdrücken nicht Null wird, so lange ist allemal eine Auflösung der Aufgabe möglich, aber auch nur eine einzige.

2) Wird aber in einem besondern Falle, der gedachte Divisor $=0$, so werden entweder alle allgemeinen Werthe der Unbekannten $=\frac{0}{0}$, wenn man sich bei einem derselben überzeugt hat, daß kein dem Zähler und Nenner gemeinschaftlicher und zu Null gewordener Faktor Ursache ist, oder alle werden von der Form $\frac{1}{0}$.

3) Werden diese Ausdrücke $=\frac{0}{0}$, so zeigt dies allemal an, daß die Gleichungen nicht alle von einander unabhängig sind, sondern in eine geringere Anzahl zusammenfallen.

4) Werden aber die allgemeinen Werthe in einem besondern

Fall von der Form $\frac{1}{0}$, so zeigt dies an, daß die n gegebenen Gleichungen einen Widerspruch enthalten, daher nie alle zu gleicher Zeit stattfinden können.

§. 110.

Sind nur m einfache und wirklich von einander unabhängige Gleichungen zwischen einer größern Zahl $m+n$ von Unbekannten gegeben, so kann man m von den $m+n$ Unbekannten in die n übrigen ausdrücken. Diesen n übrigen Unbekannten kann man nun ganz beliebige Werthe beilegen, und man erhält jedesmal die zugehörigen Werthe der erstern m Unbekannten, so daß die angenommenen und die dazu gefundenen Werthe aller $m+n$ Unbekannten, den gegebenen m Gleichungen ein Genüge leisten.

So oft also weniger Gleichungen gegeben sind, als Unbekannte, diese Gleichungen aber einfache sind und sich dabei nicht widersprechen, so oft kann man für die Unbekannten nach Willkür eine beliebige unendliche Menge von Auflösungen entwickeln, die in so ferne sie zusammengehörige sind, den gegebenen Gleichungen ein Genüge leisten.

Anmerkung. Dasselbe gilt aber nicht bloß von den einfachen, sondern auch von beliebigen algebraischen Gleichungen, so wie auch von den transcendenten, unter der Voraussetzung jedoch, daß die nöthigen Auflösungen wirklich entwickelt, oder doch als möglich gedacht werden können.

Beispiel 1. Ist gegeben die Gleichung

$$ax+by = c,$$

zwischen den beiden Unbekannten x und y, so findet man z. B.

$$x = \frac{c-by}{a},$$

wo y jeden beliebigen Werth repräsentirt. — Setzt man nun z. B.

$$y = \frac{a}{b}, \text{ so wird } x = \frac{c-a}{a},$$

und diese beiden Werthe von x und von y leisten der gegebenen Gleichung ein Genüge. — Hätte man statt y einen beliebigen andern Werth gesetzt, so würde man auch für x einen andern Werth erhalten, und beide zusammengehörigen Werthe würden der Gleichung wiederum ein Genüge geleistet haben.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$ax+by+cz = d$$

zwischen den 3 Unbekannten x, y, z, so findet man z. B. $x = \frac{d-by-cz}{a}$, wo y und z jeden beliebigen Ausdruck repräsentiren.

Beispiel 3. Wären dagegen gegeben die beiden Gleichungen

$$ax+by+cz = d \quad \text{und} \quad mx+ny+pz = q$$

zwischen den 3 Unbekannten x, y und z, so würde man gefunden haben

$$y = \frac{(d-cz)m-(q-pz)a}{bm-an}$$

und

$$x = \frac{(q-pz)b-(d-cz)n}{bm-an}$$

oder

$$y = \frac{dm-aq+(ap-cm)z}{bm-an}$$

und

$$x = \frac{bq-dn+(cn-bp)z}{bm-an},$$

wo z jeden beliebigen Ausdruck repräsentirt.

Aehnliche Beispiele lassen sich leicht für 4 und für beliebig viel Unbekannte, zwischen denen man eine geringere Anzahl von Gleichungen hat, aufstellen.

§. 111.

Führen daher allgemeine Auflösungen mehrerer Gleichungen mit eben so viel Unbekannten in einem besondern Fall zu der

Form $\frac{0}{0}$, doch ohne daß diese Form von einem gemeinschaftlichen und zu Null gewordenen Faktor herrührt, so ist dies ein Zeichen, daß die gegebenen Gleichungen unendlich viele Auflösungen zulassen, in so ferne dann weniger von einander unabhängige Gleichungen gegeben sind, als Unbekannte.

§. 112.

Sind aber mehr Gleichungen gegeben als Unbekannte, z. B. $m+n$ Gleichungen zwischen m Unbekannten, so kann man die m Unbekannten aus m beliebigen dieser $m+n$ Gleichungen finden und diese Werthe in die n übrigen Gleichungen statt der Unbekannten setzen, und man hat dann n (Eliminations-) Gleichungen, die gar keinen Unbekannten, sondern lauter gegebene Ausdrücke enthalten. Daher sind nur zwei Fälle denkbar, 1) entweder diese Gleichungen sind in der That alle identisch, und dann folgt, daß die $m+n$ Gleichungen nicht alle von einander unabhängig waren, sondern daß man eigentlich nur m oder eine geringere Zahl von einander wirklich unabhängiger *) Gleichungen hatte, mit eben so viel Unbekannten; oder 2) diese n Gleichungen widersprechen sich alle oder zum Theil gerade zu, und dies ist dann ein Beweis, daß diese $m+n$ Gleichungen nicht zugleich mit einander bestehen können, daß also die Voraussetzung, unter der sie entstanden sind, für diesen Fall nicht mehr Statt habe.

Im Allgemeinen sind die n Eliminationsgleichungen als die Bedingungen anzusehen, welche erfüllt sein müssen, wenn die gegebenen $m+n$ Gleichungen eine Bestimmung ihrer m Unbekannten zulassen sollen.

---

*) Man nennt eine Gleichung unabhängig von gegebenen anderen Gleichungen, wenn sie auf keine Weise durch irgend eine Verbindung dieser letztern hervorgehen kann.

Sind z. B. gegeben die drei Gleichungen

1) $4x-3y=6$

2) $2x+5y=16$

3) $3x+2y=13$

zwischen den zwei Unbekannten x und y, so wähle man die beiden erstern, nämlich

1) $4x-3y=6$

2) $2x+5y=16$

und löse sie nach x und y auf; die 2te mit 2 multiplicirt und dann die 1te davon subtrahirt, geben

4) $13y=26$, woraus $y=2$.

Dieser Werth von y in die 1.) oder 2.) substituirt, giebt entweder

5) $4x-6=6$

oder 6) $2x+10=16$

und jede dieser beiden Gleichungen giebt nun $x=3$.

Setzt man aber diese Werthe $x=3$ und $y=2$ in die dritte Gleichung (3.), so wird sie

7) $3 \cdot 3+2 \cdot 2=13$;

und da diese Gleichung eine identische ist, so hat man Werthe von x und von y gefunden, welche alle drei Gleichungen 1.—3.) identisch machen.

Wäre aber die dritte Gleichung diese gewesen

3) $3x+2y=12$,

so würde die Substitution der aus 1.) u. 2.) gefundenen Werthe von x und von y gegeben haben die Gleichung

8) $13=12$

und dieser Widerspruch hätte angezeigt, daß es Werthe von x und von y nicht giebt, welche alle drei gegebene Gleichungen zwischen x und y, zugleich identisch machen; obgleich es unendlich

viele Werthe von x und y giebt, welche eine davon, und unter diesen ein einziges Paar, welches auch noch die zweite derselben Gleichungen identisch macht.

Anmerkung. Was im §. 112. von einfachen Gleichungen gesagt wurde, gilt mit den nöthigen Modifikationen von allen beliebigen algebraischen Gleichungen nicht minder, eben so wie von den transcendenten Gleichungen, jedoch unter der Voraussetzung, daß jede erforderliche Auflösung wirklich entwickelt, oder doch als möglich gedacht werden könne.

§. 113.

So oft daher n Gleichungen in Bezug auf n Unbekannte, einfache und wirklich von einander unabhängige Gleichungen sind, die sich auch nicht widersprechen, so oft haben diese n Unbekannten bestimmte Werthe. Hat man daher aus den gegebenen n Gleichungen durch beliebige Verbindung mit einander, n neue Gleichungen abgeleitet, die nach denselben n Unbekannten einfache und noch von einander unabhängige sind, so bezeichnen diese n Unbekannten noch immer dieselben Werthe, so daß diese letztern n Gleichungen in Bezug auf die Bestimmung der n Unbekannten, die erstern n gegebenen Gleichungen gänzlich ersetzen.

Es ist dies aber deshalb vorzüglich wichtig, weil man aus gegebenen Gleichungen, öfters andere ableiten kann, aus denen die Bestimmung der Werthe der Unbekannten weit einfacher und leichter hervorgeht, als geradezu aus den gegebenen.

Beispiel 1. Es seien gegeben die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} ax+ay+az=f \\ bx+by+bv=g \\ cx+cz+cv=h \\ dy+dz+dv=k \end{array}\right\} \cdots (A)$$

und solche nach x, y, z, v, aufzulösen.

Man leite zuerst daraus ab, indem man die einzelnen Gleichungen bezüglich durch a, b, c und d dividirt,

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= \frac{f}{a} \\ x+y+v &= \frac{g}{b} \\ x+z+v &= \frac{h}{c} \\ y+z+v &= \frac{k}{d} \end{aligned}\right\} \cdots (B).$$

Nun addire man diese 4 Gleichungen und man erhält

$$x+y+z+v = \tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right) \cdots (C).$$

Subtrahirt man nun von dieser Gleichung C. die Gleichungen B., eine nach der andern, so erhält man:

$$v = \tfrac{1}{3}\left(\frac{-2f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$z = \tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}-\frac{2g}{b}+\frac{h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$y = \tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}-\frac{2h}{c}+\frac{k}{d}\right),$$

$$x = \tfrac{1}{3}\left(\frac{f}{a}+\frac{g}{b}+\frac{h}{c}-\frac{2k}{d}\right),$$

oder

$$v = \frac{-2bcdf+acdg+abdh+abck}{3abcd},$$

$$z = \frac{bcdf-2acdg+abdh+abck}{3abcd},$$

$$y = \frac{bcdf+acdg-2abdh+abck}{3abcd},$$

$$x = \frac{bcdf+acdg+abdh-2abck}{3abcd},$$

welches die Auflösungen der gegebenen Gleichungen sein müssen.

Beispiel 2. Sind gegeben und nach x, y und z aufzulösen die Gleichungen

$$1)\quad ax+hy=cxy,$$

$$2)\quad ex+fz=gxz,$$

$$3)\quad hy+kz=lyz;$$

so dividire man die erste durch xy, die 2te durch xz, und die 3te durch yz, und man erhält

$$4)\quad a\cdot\frac{1}{y}+b\cdot\frac{1}{x}=c,$$

$$5)\quad e\cdot\frac{1}{z}+f\cdot\frac{1}{x}=g,$$

$$6)\quad h\cdot\frac{1}{z}+k\cdot\frac{1}{y}=l;$$

und man betrachte in diesen neuen Gleichungen nicht mehr x, y, z, sondern $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ als die zu suchenden Unbekannten, so sind solche jetzt einfache Gleichungen, welche (nach §§. 105. ꝛc.) aufgelöst werden können und geben

$$\frac{1}{x}=\frac{cek+agh-ael}{afh+bek},$$

$$\frac{1}{y}=\frac{cfh-bgh+bel}{afh+bek},$$

$$\frac{1}{z}=\frac{afl+bgk-cfk}{afh+bek},$$

woraus dann sogleich hervorgeht, weil $x=1:\frac{1}{x}$, und $1:\frac{p}{q}=\frac{q}{p}$ ist:

$$x=\frac{afh+bek}{cek+agh-ael},$$

$$y=\frac{afh+bek}{cfh-bgh+bel},$$

$$z=\frac{afh+bek}{afl+bgk-cfk}.$$

Anmerkung. Weil man aber oben durch xy, xz, yz dividirt hat, so hat man vorausgesetzt, daß x, y, z nicht Null sind. Man muß daher noch untersuchen, ob nicht auch x oder y oder z der Null gleich sein kann; und da findet man sogleich, daß $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ebenfalls Werthe sind, welche den gegebenen Gleichungen 1. 2. 3.), die nicht einfache sind, ebenfalls noch genügen, außer denen, die so eben in Bruchform gefunden worden sind.

Mehrere hierher gehörige Uebungsbeispiele.

1) Aus $\left\{\begin{matrix} x+y = s \\ x-y = d \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{2}(s+d) \\ y = \frac{1}{2}(s-d) \end{matrix}\right\}$.

2) Aus $\left\{\begin{matrix} 4x-3y = 130 \\ 2x+5y = 216 \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = 55 \\ y = 30 \end{matrix}\right\}$.

3) Aus $\left\{\begin{matrix} -x+3y = 104 \\ 5x-2y = 78 \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = 34 \\ y = 46 \end{matrix}\right\}$.

4) Aus $\left\{\begin{matrix} 5x-8\frac{1}{2} = 7y-44 \\ 2x = y+\frac{5}{7} \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = 4\frac{1}{2} \\ y = 8\frac{2}{7} \end{matrix}\right\}$.

5) Aus $\left\{\begin{matrix} ax = by \\ x+y = c \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = bc:(a+b) \\ y = ac:(a+b) \end{matrix}\right\}$.

6) Aus $\left\{\begin{matrix} \dfrac{a}{b-y} = \dfrac{b}{3a+x} \\ ax-2by = d \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = \dfrac{-6a^2+2b^2+d}{3a} \\ y = \dfrac{-3a^2+b^2-d}{3b} \end{matrix}\right\}$.

7) Aus $\left\{\begin{matrix} \dfrac{8x}{7} = \dfrac{5(x-y)}{3} - 6 \\ \dfrac{3x-y}{9} + 5 = \dfrac{4y+3x}{6} \end{matrix}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{matrix} x = \frac{702}{37} = 18\frac{36}{37} \\ y = \frac{612}{259} = 2\frac{94}{259} \end{matrix}\right\}$.

8) Aus $\left\{\begin{aligned} ax-by &= c \\ \frac{p-qy}{r}-c &= \frac{my}{d} \end{aligned}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{aligned} y &= \frac{dp-cdr}{mr+dq} \\ x &= \frac{cmr+cdq+bdp-bcd}{amr+adq} \end{aligned}\right\}$.

9) Aus $\left\{\begin{aligned} x-y+z &= 30 \\ 8x-4y+2z &= 50 \\ 27x-9y+3z &= 64 \end{aligned}\right\}$ findet sich $\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} \\ y &= 7 \\ z &= 36\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\}$.

10) Aus $\left\{\begin{aligned} 4x+7y &= 159 \\ 3\tfrac{1}{3}x &= \tfrac{1}{6}z-55 \\ 9z-498 &= 2x+y \end{aligned}\right\}$ folgt $\left\{\begin{aligned} x &= 13\tfrac{1}{2} \\ y &= 15 \\ z &= 60 \end{aligned}\right\}$.

§. 114.

Ehe wir dieses Kapitel schließen, wollen wir noch einmal auf die Werthe der Unbekannten zurückkommen, welche aus den beiden einfachen Gleichungen

und $\left.\begin{aligned} ax+by &= c \\ a_1x+b_1y &= c_1 \end{aligned}\right\}\ldots\text{ I.},$

oder aus den drei einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz &= d \\ a_1x+b_1y+c_1z &= d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z &= d_2 \end{aligned}\right\}\ldots\text{ II.},$$

oder aus den vier einfachen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz+dv &= f \\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1v &= f_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2v &= f_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3v &= f_3 \end{aligned}\right\}\ldots\text{ III.},$$

oder aus einer beliebigen Anzahl von analogen einfachen Gleichungen, zwischen eben so vielen Unbekannten hervorgehen.

Betrachtet man nämlich die aus den Auflösungen der Gleichungen I. und II. sich ergebenden Werthe, wie solche in dem §. 100. (für die Gleichungen I.) und in dem §. 105. (für die

Gleichungen II.) gefunden worden sind, so bemerkt man bald folgende Gesetze:

1) Der Nenner der für die Unbekannten gefundenen Ausdrücke ist bloß aus den Koeffizienten von x und y (in I.), oder von x, y und z (in II.) zusammengesetzt, und der jedesmal zugehörige Zähler für die Werthe von x, y, 2c. leitet sich aus dem Nenner dadurch ab, daß man im Nenner an die Stelle der Koeffizienten von x, y, 2c. die Werthe auf der anderen Seite der gegebenen einfachen Gleichungen setzt. — So z. B. geht in der Gleichung 7.) des §. 105. der Zähler (für den Werth von x) aus dem Nenner dadurch hervor, daß man im Nenner an die Stelle der drei Koeffizienten a, a_1 und a_2 von x in den aufzulösenden Gleichungen 1.–3.) daselbst, bezüglich die Werthe d, d_1 und d_2 auf der rechten Seite derselben Gleichungen setzt. — In der 8.) geht der Zähler (für den Werth von y) dadurch aus dem Nenner hervor, daß man statt der Koeffizienten b, b_1 und b_2 von y, jetzt bezüglich d, d_1 und d_2 substituirt; u. s. w. f.

2) Was die Bildung des Nenners betrifft in den Werthen von x, y und z des §. 105., so läßt er sich offenbar wie folgt hervorbringen:

α) Man schreibt zunächst 0, 1, 2 hin, aber im Kreise $\left[\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0 & & 2\end{smallmatrix}\right]$, so nämlich, daß nach der 1, der Ordnung im Kreise nach, folgt zuerst 2 und dann 0; und nach der 2 der Ordnung im Kreise nach, folgt zuerst 0 und dann 1.

β) Man verwechselt nun in jeder dieser drei Folgen

0 1 2, 1 2 0 und 2 0 1

die beiden letzten Elemente mit einander, so daß man erhält

0 2 1, 1 0 2 und 2 1 0

γ) Man nimmt nun abc sechsmal und hängt jedesmal an die Buchstaben a, b und c bezüglich diese 6 verschiedenen Anordnungen der Zahlen 0, 1 und 2 unten rechts an, und man

hat die 6 Glieder des Nenners, wenn man nur die drei erstern $\left\{\begin{matrix}\text{addirt}\\ \text{subtrahirt}\end{matrix}\right\}$, die drei letztern aber $\left\{\begin{matrix}\text{subtrahirt}\\ \text{addirt}\end{matrix}\right\}$; — und den Zeiger 0 überall ganz wegläßt im Schreiben.

Findet man nun nach N. 1. die Zähler dazu, so hat man die Werthe der Unbekannten bequem gefunden.

3) Ganz auf analoge Weise findet man die Werthe der Unbekannten im §. 100., wenn man die möglichen Verbindungen macht

$$0\ 1 \quad \text{und} \quad 1\ 0$$

und diese an ab anhängt, so daß man

$$a_0 b_1 \quad \text{und} \quad a_1 b_0$$

erhält, und das eine dieser Glieder addirt, das andere subtrahirt, also

$$\text{entweder} \qquad ab_1 - a_1 b \qquad \text{oder} \qquad -ab_1 + a_1 b$$

zum Nenner nimmt, indem man die Zeiger 0 zu schreiben unterläßt.

Der Zähler des Werthes für x findet sich nun dazu, wenn man im Nenner statt der Koeffizienten a und a_1 von x, bezüglich c und c_1 setzt, — während sich der Zähler des Werthes von y findet, wenn man im Nenner statt der Koeffizienten b und b_1 von y, bezüglich c und c_1 substituirt.

4) Dies alles führt uns zu der Vermuthung, daß man auch bei der Auflösung der obigen vier einfachen Gleichungen III. analoge gesetzmäßige Resultate erhalten werde und in der That findet man den gemeinschaftlichen Nenner der Werthe der vier Unbekannten auf folgende Weise:

α) Zuerst schreibt man 0 1 2 3 im Kreise hin $\left[\begin{matrix} & 1 & \\ 0 & & 2 \\ & 3 & \end{matrix}\right]$,

so daß auf 1, der Ordnung im Kreise nach, folgen 2, 3, 0; — auf 2, der Ordnung im Kreise nach, folgen 3, 0, 1, und auf 3 in der Ordnung folgen 0, 1, 2.

β) Man schreibt nun diese vier Anordnungen hin, nämlich

0123, 1230, 2301, 3012.

Hierauf behandelt man in jeder dieser Anordnungen die 3 letztern Elemente genau nach Anleitung der N. 2., indem man das erstere Element dabei unverändert läßt, so daß man erhält:

0123	1230	2301	3012
0132	1203	2310	3021
0231	1302	2013	3120
0213	1320	2031	3102
0312	1023	2130	3201
0321	1032	2103	3210.

γ) Diese Zeiger hängt man nun nach und nach an abcd an, läßt 0 im Schreiben weg und nimmt die Glieder, wie sie unter einander folgen abwechselnd mit entgegengesetztem Vorzeichen, so hat man den gesuchten Nenner, nämlich

$$+ab_1c_2d_3+a_1b_2c_3d+a_2b_3cd_1+a_3bc_1d_2$$
$$-ab_1c_3d_2-a_1b_2cd_3-a_2b_3c_1d-a_3bc_2d_1$$
$$+ab_2c_3d_1+a_1b_3cd_2+a_2bc_1d_3+a_3b_1c_2d$$
$$-ab_2c_1d_3-a_1b_3c_2d-a_2bc_3d_1-a_3b_1cd_2$$
$$+ab_3c_1d_2+a\ bc_2d_3+a_2b_1c_3d+a_3b_2cd_1$$
$$-ab_3c_2d_1-a\ bc_3d_2-a_2b_1cd_3-a_3b_2c_1d.$$

Zu diesem gemeinschaftlichen Nenner, in welchem auch alle Glieder mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden können, findet man nun die vier Zähler für die Werthe der vier Unbekannten x, y, z und v dazu, wenn man f, f_1, f_2 und f_3 bezüglich statt a, a_1, a_2 und a_3, oder bezüglich statt b, b_1, b_2 und b_3, oder bezüglich statt c, c_1, c_2 und c_3, oder endlich bezüglich statt d, d_1, d_2 und d_3 schreibt.

So sind also nun die vier Gleichungen III. nach den vier Unbekannten x, y, z und v aufgelöst.

Behandelt man nämlich die Gleichungen nach der französischen Eliminations-Methode, so findet man nicht bloß, daß das

Resultat mit dem so eben gefundenen übereinstimmt, sondern man findet bei aufmerksamer Beobachtung des Ganges der Arbeit, das Gesetz selbst, wie solches schon die Anmerkung 1. des §. 108. zur Genüge sehen läßt. Dies mag hier genügen, besonders wenn wir hinzufügen, daß die dortigen Gleichungen 5.) und 6.), welche q und r zu liefern haben, während p beliebig angenommen werden kann, selber wieder nach der französischen Eliminations-Methode auch „Methode der Multiplikatoren" genannt, behandelt werden können.

5) Das Vorstehende läßt aber zur Genüge sehen, wie, wenn n einfache Gleichungen zwischen n Unbekannten gegeben sind, die Werthe dieser n Unbekannten ohne Weiteres und ohne alle Zwischen-Rechnung hingeschrieben werden können. — Nur wenn die gegebenen Gleichungen noch nicht nach den Unbekannten geordnet sein sollten, müßten solche natürlich vorher geordnet werden; und wenn die Koeffizienten der Unbekannten in den geordneten Gleichungen nicht gerade a, b, c, d, 2c. — a_1, b_1, c_1, d_1, 2c., — a_2, b_2, c_2, d_2, 2c., — sein werden, sondern beliebig anders sind, so müßte man sie erst durch die vorstehenden Zeichen bezeichnen, in den Endresultaten aber statt dieser Zeichen wiederum ihre Werthe setzen.

6) Der gemeinschaftliche Nenner der Werthe der Unbekannten, wie solcher nach den vorstehenden Nummern bloß durch gehörige Versetzung der Zeiger gefunden wird, heißt die zu diesen Koeffizienten der Unbekannten gehörige Determinante. — Diese Determinante ist stets doppeldeutig, weil, wenn sie einmal bestimmt ist, auch alle ihre Glieder zugleich mit dem entgegengesetzten Vorzeichen genommen werden können. — Wie man aber die Determinante nehmen mag, so finden sich jedesmal aus ihr die Zähler der einzelnen Unbekannten auf dem vorbeschriebenen Wege (nämlich durch Vertauschung der Koeffizienten des Unbekannten, dessen Werth eben hingeschrieben werden soll, mit den Gliedern auf der rechten Seite der nach dem Muster I., II. oder III. geordneten Gleichungen) richtig hinzu. Verändert man

nämlich die Vorzeichen aller Glieder im Nenner in die entgegengesetzten, so hat man dadurch, daß aus dem Nenner der Zähler bloß durch Vertauschung gewisser Buchstaben in den einzelnen Gliedern, gefunden wird, zugleich auch alle Vorzeichen des Zählers in die entgegengesetzten verwandelt, so daß der neue Bruch dem alten gleich sein muß, weil er aus dem alten dadurch hervorgeht, daß man Zähler und Nenner desselben zugleich mit −1 multiplicirt (§. 37. N. 28.).

Achtes Kapitel.

Einige Anwendungen der Algebra auf die Auffindung der Eigenschaften und auf die Umformung der ganzen und der gebrochenen Funktionen.

Vorerinnerung.

Man kann von der Algebra Anwendungen machen, um Größen zu bestimmen, welche von andern gegebenen Größen abhängig sind, — und solche Anwendungen finden wir gegen Ende dieses Theils in der sogenannten „Allgemeinen Größenlehre" gemacht; — man kann aber auch die Algebra verwenden zu Zwecken der Buchstabenrechenkunst, also zu praktischen Umformungen gegebener Ausdrücke. — Anwendungen dieser letzteren Art sind es, von denen wir einige in dem gegenwärtigen Kapitel nachweisen wollen, wobei wir auch noch die Absicht haben, dem Anfänger das Wesen der Gleichungen in lebendiger Anschauung zu erhalten.

§. 115.

Man kann zunächst die Algebra dazu verwenden, um Formeln zu finden, nach denen „gerechnet" werden kann §. 9.

Man wünscht z. B. einen gegebenen Quotienten $\frac{A}{B}$ in eine Summe umzuformen. — Weil man die Ausdrücke, welche die Summanden dieser gesuchten Summe bilden, noch nicht kennt, so bezeichnet man sie einstweilen durch x und durch z, und hat nun die Gleichung

$$1) \qquad \frac{A}{B} = x + z.$$

Aus dieser Gleichung sollen nun die durch x und z bezeichneten Ausdrücke gefunden werden. — Weil man aber aus einer Gleichung auch nur einen Unbekannten finden kann, so sehen wir sogleich, daß der eine dieser beiden Summanden völlig willkürlich bleibt und nur der andere dazu gefunden wird. Man findet aber nun aus der Gleichung 1.) auf dem Wege der Algebra sogleich

$$2)\qquad x = \frac{A}{B} - z$$

so daß, wenn man dies statt x in die 1.) substituirt, die richtige (identische) Gleichung

$$3)\qquad \frac{A}{B} = \left(\frac{A}{B} - z\right) + z$$

sich ergiebt, welches eine richtige Rechnungsformel ist, die aber rechts denselben Quotienten $\frac{A}{B}$ wieder hat, der links steht.

Will man das letztere vermeiden, so kann man, um die Gleichung 1.) nach z aufzulösen, vorher die Quotienten wegschaffen und zu dem Ende dieselbe Gleichung mit B multipliciren. Dies giebt

$$4)\qquad A = Bx + Bz,$$

woraus dann

$$5)\qquad A - Bz = Bx \quad \text{und} \quad \frac{A - Bz}{B} = x$$

sich ergiebt. Substituirt man nun diesen Werth von x in die Gleichung 1.), so hat man wieder eine richtige (identische) Gleichung, nämlich

$$6)\qquad \frac{A}{B} = \frac{A - Bz}{B} + z = z + \frac{A - Bz}{B};$$

und dies ist die Formel §. 37. N. 35.), welche wir dort bloß synthetisch aufgestellt und bewiesen haben, ohne daß wir an derselben Stelle gezeigt hätten, wie solche gefunden werden

kann, welches letztere erst jetzt mit Hilfe der Algebra geschehen konnte.

Wir haben, wie sich die aufmerksamen Leser erinnern werden, gerade von dieser Formel Gebrauch gemacht, um das sogenannte praktische Dividiren zweier algebraischen Summen, und später auch das Dividiren zweier numerischer, d. h. nach Potenzen von 10 geordneter ganzer Zahlen zu bewerkstelligen (d. h. die Umformung des zuerst bloß hingeschriebenen Quotienten in eine neue algebraische Summe oder in eine neue numerische Zahl). Wir wollen hier noch eine dritte Anwendung derselben Formel N. 6. (oder §. 37. N. 35.) zeigen und zwar auf die praktische Division zweier nach ganzen Potenzen von x geordneten algebraischen Summen (von der Form

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots+px^n).$$

§. 116.

Man nennt gewöhnlich solche, nach ganzen Potenzen von x geordnete algebraische Summen, wie z. B.

$$3-2x+7x^2+\tfrac{3}{2}x^3-x^4+2x^5-3x^6,$$

ganze Funktionen von x und die gegenwärtige ist vom 6^{ten} Grad, während sie vom n^{ten} Grade genannt wird, wenn x^n die höchste in ihr vorkommende Potenz von x ist. — Der Buchstabe x wird dabei der Veränderliche genannt, eben weil er keinen bestimmten Werth vorstellt, sondern für ihn alles denkbare gesetzt werden kann.

Wenn man zwei solche ganze Funktionen von x zu einander addirt oder von einander subtrahirt, so darf man nur die Glieder addiren oder subtrahiren, zu oder von einander, welche eine und dieselbe Potenz von x haben, — dann die Formel anwenden, nach welcher $a \cdot x^\nu \pm b \cdot x^\nu = (a \pm b) \cdot x^\nu$ ist, und man hat sogleich wieder eine ganze Funktion von x, welche als Endresultat der Rechnung sich ergiebt.

Werden aber zwei ganze Funktionen von x mit einander multiplicirt, so kann man, — wenn man weiter „rechnen" (d. h.

umformen) will, — jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliciren und alles addiren. Faßt man zuletzt wieder alle Glieder, welche mit einerlei Potenz von x versehen sind, nach der Formel

$$ax^{\nu} \pm bx^{\nu} \pm cx^{\nu} \pm dx^{\nu} + \cdots = (a \pm b \pm c \pm d + \cdots) \cdot x^{\nu},$$

in ein einziges Glied zusammen, so hat man zuletzt das Produkt der beiden gegebenen ganzen Funktionen von x, in eine neue ganze Funktion von x umgeformt. — Und sind die beiden Faktoren des Produkts bezüglich vom m^{ten} und vom n^{ten} Grade, so ist das Endresultat der Multiplikation vom $m+n^{ten}$ Grade.

So erhält man, wenn das Produkt aus

$$3-2x+x^2-4x^3 \qquad \text{und} \qquad 1+3x-x^2$$

in eine neue ganze Funktion von x umgeformt werden soll, folgende Rechnung

der Multiplikand	$3-2x+x^2-4x^3$
1 mal ···	$3-2x+x^2-4x^3$
3x mal ···	$+9x-6x^2+3x^3-12x^4$
$-x^2$ mal ···	$-3x^2+2x^3-x^4+4x^5$
das Produkt ist	$=3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5$;

und während die beiden Faktoren bezüglich vom 3^{ten} und 2^{ten} Grade sind, ist das Endresultat der Multiplikation eine ganze Funktion vom $(3+2)^{ten}$ d. h. vom 5^{ten} Grade.

§. 117.

Sollen nun zwei solche ganze Funktionen von x, durch einander dividirt werden, z. B. die ganze Funktion $3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5$, welche vom 5^{ten} Grade ist, durch die ganze Funktion $1+3x-x^2$ vom zweiten Grade, so erhält man (nach §. 34.) zunächst den Quotienten

$$(Q)\cdots \qquad \frac{3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2};$$

dann aber kann man es versuchen, dieses vorliegende Resultat

der Division (diesen Quotienten) in eine nach ganzen Potenzen von x geordnete Summe zu verwandeln.

Zu dem Ende wendet man die im vorhergehenden §. 115. zu diesem Zwecke gefundene Formel

$$\frac{A}{B} = z + \frac{A-Bz}{B}$$

an. Nach ihr ist der erste Summand z, von A und B ganz unabhängig, also beliebig anzunehmen; — ist er aber angenommen, so findet sich jedesmal der zweite Summand $\frac{A-Bz}{B}$, wie man sieht, dazu, wenn man den erst angenommenen Summanden (z) mit dem Divisor (B) multiplicirt, das Produkt (Bz) von dem Dividenden (A) subtrahirt, den Rest (das Resultat der Subtraktion, A—Bz) aber durch den Divisor (B) wieder dividirt, wobei jedes der vorhergehenden Resultate, bevor man weiter geht, erst noch umgeformt werden kann.

Weil aber der erste Summand z jedesmal ganz willkürlich genommen werden kann, so nehme man für ihn jedesmal den Quotienten derjenigen beiden Glieder des Dividenden und Divisors, entweder welche beide mit den niedrigsten, oder welche beide mit den höchsten Potenzen von x versehen sind, — in dem vorliegenden Beispiele also entweder $\frac{3}{1}$ d. h. 3, oder $\frac{4x^5}{-x^2}$ d. h. $-4x^3$; man erhält dann den Quotienten Q,

$$= 3 + \frac{-2x-5x^2+x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2},$$

oder

$$= -4x^3 + \frac{3+7x-8x^2+5x^3-x^4}{1+3x-x^2}.$$

In jedem dieser beiden Resultate ist der zweite Summand jedesmal wieder ein Quotient und derselbe kann daher wieder (nach derselben Formel) in eine Summe von zwei Summanden verwandelt werden, und dabei kann man wieder den ersten Summanden ganz willkürlich wählen, also um consequent zu bleiben,

bei dem ersteren $\frac{-2x}{1}$ d. h. $-2x$, bei dem anderen dagegen $\frac{-x^4}{-x^2}$ d. h. $+x^2$; man erhält nun

$$Q = 3-2x+\frac{x^2-x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2},$$

oder

$$Q = -2x^3+x^2+\frac{3+7x-9x^2+2x^3}{1+3x-x^2}.$$

In jedem dieser beiden Resultate kann der dritte Summand, weil er noch ein Quotient ist, (nach derselben Formel) abermals in eine Summe von zwei Summanden verwandelt werden, wo man den jedesmaligen ersten Summanden beliebig annehmen kann und ihn deshalb, um consequent zu bleiben, bei dem erstern $=\frac{x^2}{1}=x^2$, bei dem andern aber $=\frac{+2x^3}{-x^2}=-2x$ nimmt. Man erhält nun

$$Q = 3-2x+x^2+\frac{-4x^3-12x^4+4x^5}{1+3x-x^2},$$

oder

$$Q = -2x^3+x^2-2x+\frac{3+9x-3x^2}{1+3x-x^2}.$$

Und verwandelt man endlich jeden dieser beiden letztern Quotienten wiederum in eine Summe von zwei Summanden (nach derselben Formel), indem man der Consequenz wegen, bei dem erstern $\frac{-4x^3}{1}$ d. h. $-4x^3$, bei dem andern dagegen $\frac{-3x^2}{-x^2}$ d. h. $+3$ zum erstern Summanden nimmt, so findet sich der zweite Summand jedesmal $=0$ dazu, und man hat gefunden:

$$Q = 3-2x+x^2-2x^3,$$

oder

$$Q = -2x^3+x^2-2x+3;$$

und beide Endresultate fallen in eine und dieselbe ganze Funktion von x zusammen, welche vom $(5-2)^{\text{ten}}$ d. h. vom 3^{ten} Grade ist.

Schematisirt man beide vorstehende Rechnungen, so sehen sie sich so an:

I. Wenn die für den Quotienten Q zu findende Summe steigend geordnet erscheinen soll.

Divisor	Dividend	Quotient =
$1+3x-x^2$	$3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5$	3
	$3+9x-3x^2$	
Erster Rest =	$-2x-5x^2+x^3-13x^4+4x^5$	$-2x$
	$-2x-6x^2+2x^3$	
Zweiter Rest =	$+x^2-x^3-13x^4+4x^5$	$+x^2$
	$+x^2+3x^3-x^4$	
Dritter Rest =	$-4x^3-12x^4+4x^5$	$-4x^3$
	$-4x^3-12x^4+4x^5$	
Letzter Rest =	$0 \quad 0 \quad 0$	

II. Wenn die für den Quotienten zu findende Summe fallend geordnet erscheinen soll.

Divisor	Dividend	Quotient =
$-x^2+3x+1$	$4x^5-13x^4+x^3-8x^2+7x+3$	$-4x^3$
	$4x^3-12x^4-4x^3$	
Erster Rest =	$-x^4+5x^3-8x^2+7x+3$	$+x^2$
	$-x^4+3x^3+x^2$	
Zweiter Rest =	$2x^3-9x^2+7x+3$	$-2x$
	$2x^3-6x^2-2x$	
Dritter Rest =	$-3x^2+9x+3$	$+3$
	$-3x^2+9x+3$	
Letzter Rest =	$0 \quad 0 \quad 0$	

§. 118.

Es giebt aber nicht immer, ja nur selten, eine ganze Funktion von x, welche dem Quotienten zweier gegebenen ganzen Funktionen von x gleich wäre. Giebt es keine, dann heißt der Quotient z. B.

$$\frac{3+7x-x^4+2x^5}{1+2x-x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{3-2x-4x^2}{1+x-2x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{3-2x}{1+2x-x^2}$$

eine gebrochene Funktion von x, und zwar eine unechte

(oder uneigentliche) gebrochene Funktion von x, oder eine echte (eigentliche) gebrochene, je nachdem der Grad des Dividenden dem des Divisors gleichkommt oder übersteigt (wie in den beiden erstern Beispielen) oder der Grad des Dividenden niedriger ist als der des Divisors (wie im dritten Beispiel).

Der Dividend einer gebrochenen Funktion wird auch ihr Zähler, der Divisor ihr Nenner genannt, und sie selbst heißt auch zuweilen schlechtweg ein Bruch.

Aber auch die gebrochene Funktion kann man, genau auf denselben Wegen und mit Hilfe desselben Mittels, in eine Summe von 2, 3, 4 und mehr und beliebig viel Summanden umformen, die entweder noch steigenden oder noch fallenden ganzen Potenzen von x fortlaufen, während zuletzt jedoch ein letzter Summand Quotienten-Form behält.

Die beiden Rechnungen nach dem vorhergehenden Muster schematisirt, sehen sich so an:

I. Wenn man sogleich eine Summe haben will, die nach steigenden Potenzen von x sich entwickelt

Divisor	Dividend	Quotient
$1+2x-x^2$	$3+7x-x^4+2x^5$	3
	$3+6x-3x^2$	
	$x+3x^2-x^4+2x^5$	$+x$
	$x+2x^2-x^3$	
	$x^2+x^3-x^4+2x^5$	$+x^2$
	$x^2+2x^3-x^4$	
	$-x^3+2x^5$	$-x^3$
	$-x^3-2x^4+x^5$	
	$2x^4-x^5$	$+2x^4$
	$2x^4+4x^5-2x^6$	
	$-3x^5+2x^6$	$-3x^5$
	$-3x^5-6x^6+3x^7$	
	$8x^6-3x^7$	$+8x^6$
	$8x^6+24x^7-8x^8$	
	$-27x^7+8x^8$	

und diese Rechnung kann beliebig weit fortgesetzt werden. Man hat aber durch diese Rechnung gefunden

$$\frac{3+7x-x^4+2x^5}{1+2x-x^2}=3+\frac{x+3x^2-x^4+2x^5}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+\frac{x^2+x^3-x^4+2x^5}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+x^2+\frac{-x^3+2x^5}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+x^2-x^3+\frac{2x^4-x^5}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+x^2-x^3+2x^4+\frac{-3x^5+2x^6}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+x^2-x^3+2x^4-3x^5+\frac{8x^6-3x^7}{1+2x-x^2}$$

$$=3+x+x^2-x^3+2x^4-3x^5+8x^6+\frac{-27x^7+8x^8}{1+2x-x^2}$$

= u. s. w. f.

Wie weit man aber auch diese Umformung fortsetzen mag, so hat der letzte Summand im Dividenden allemal höhere Potenzen von x, als die höchste, die in den vorhergehenden ganzen Gliedern gefunden wird.

II. Wenn die für den Quotienten zu findende Summe sogleich fallend geordnet erscheinen soll.

Divisor	Dividend	Quotient
$-x^2+2x+1$	$2x^5-x^4+7x+3$	$-2x^3$
	$2x^5-4x^4-2x^3$	
	$3x^4+2x^3+7x+3$	$-3x^2$
	$3x^4-6x^3-3x^2$	
	$8x^3+3x^2+7x+3$	$-8x$
	$8x^3-16x^2-8x$	
	$19x^2+15x+3$	-19
	$19x^2-38x-19$	
	$53x+22$	$-\frac{53}{x}$
	$53x-106-\frac{53}{x}$	
	$128+\frac{53}{x}$	$-\frac{128}{x^2}$
	$128-\frac{256}{x}-\frac{128}{x^2}$	
	$+\frac{309}{x}+\frac{128}{x^2}$	

und auch diese Rechnung kann beliebig weit fortgesetzt werden. Durch diese Rechnung hat man aber gefunden

$$\frac{2x^5-x^4+7x+3}{-x^2+2x+1}=-2x^3+\frac{3x^4+2x^3+7x+3}{-x^2+2x+1}$$

$$=-2x^3-3x^2+\frac{4x^3+3x^2+7x+3}{-x^2+2x+1}$$

$$=-2x^3-3x^2-8x+\frac{19x^2+15x+3}{-x^2+2x+1}$$

$$=-2x^3-3x^2-8x-19+\frac{53x+22}{-x^2+2x+1}$$

$$=-2x^3-3x^2-8x-19-\frac{53}{x}+\frac{128+53x^{-1}}{-x^2+2x+1}$$

$$=-2x^3-3x^2-8x-19-\frac{53}{x}-\frac{128}{x^2}+\frac{309x^{-1}+128x^{-2}}{-x^2+2x+1}$$

= u. s. w. f.

§. 119.

Hätte man die Absicht gehabt, die gegebene unechte gebrochene Funktion in die Summe aus einer ganzen Funktion und einer echtgebrochenen zu verwandeln, so hätte man sich mit dem vierten Resultate begnügt, nämlich mit

$$(\odot)\ldots\quad \frac{2x^5-x^4+7x+3}{-x^2+2x+1}=-2x^3-3x^2-4x-11+\frac{33x+14}{-x^2+2x+1}.$$

Es erhellet also, wie man auf diesem zweiten Wege (bei fallend geordneten Dividenden und Divisor im Schema) jede **unecht**-gebrochene Funktion von x, in die Summe aus einer ganzen und einer **echt**-gebrochenen Funktion von x umformen kann. —

Und ist in einer solchen unecht-gebrochenen Funktion der Dividend vom m^{ten}, der Divisor dagegen vom n^{ten} Grade, so ist die **ganze** Funktion, welche auf dem eben bezeichneten Wege erhalten wird, allemal vom $(m-n)^{ten}$ Grade.

§. 120.

Wendet man aber etwas Algebra an, so kann man statt (wie wir im §. 115. gethan haben) eine allgemeine Formel zu

finden, auch auf analoge Weise für jeden besonderen Fall die besondere Summe finden, die dem gegebenen besonderen Quotienten gleich ist.

Nehmen wir das Beispiel des §. 117., wo eine ganze Funktion vom 3^{ten} Grade gefunden werden sollte, welche dem Quotienten

$$\frac{3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2}$$

gleich ist, so setzt man hin die Gleichung

$$1)\qquad \frac{3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2} = a+bx+cx^2+dx^3,$$

indem man die (unbekannten) Koeffizienten dieser gesuchten Funktion von x einstweilen durch a, b, c und d bezeichnet und deshalb nicht mehr Glieder nimmt, weil man weiß, daß der Quotient, wenn er existirt, nur vom $(5-2)^{ten}$ d. h. vom 3^{ten} Grade sein kann. Da nun aus dieser einzigen Gleichung vier Unbekannte a, b, c und d gefunden werden sollen, so würde man drei derselben beliebig annehmen können und dann den vierten aus der zu erfüllenden Gleichung dazu finden, wenn hier nicht noch eine zweite Bedingung zu erfüllen wäre, nämlich die, daß a, b, c und d Koeffizienten der Potenzen von x, d. h. von x selbst unabhängig sein sollen.

Um nun zu sehen, ob und wie man allen diesen Bedingungen genügen könne, schaffe man zuerst den Bruch weg, d. h. man multiplicire links und rechts mit dem Divisor $1+3x-x^2$, — man erhält

$$2)\qquad 3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5$$
$$= a+\begin{pmatrix} b \\ +3a \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} c \\ +3b \\ -a \end{pmatrix}x^2+\begin{pmatrix} d \\ +3c \\ -b \end{pmatrix}x^3+\begin{pmatrix} 3d \\ -c \end{pmatrix}x^4-dx^5,$$

Diese Gleichung 2.) und mit ihr die obige 1.) würde nun ganz entschieden eine richtige (identische) sein, wenn links und rechts die einzelnen gleichnamigen Potenzen von x einerlei Koeffizienten hätten, also wenn a, b, c, d so angenommen werden könnten, daß

$$3)\quad \begin{cases} 3 = a, \\ 7 = b+3a, \\ -8 = c+3b-a, \\ 1 = d+3c-b, \\ -13 = 3d-c, \\ \text{und}\quad 4 = -d \end{cases}$$

wäre.

Weil dies aber 6 Gleichungen zwischen nur 4 Unbekannten sind, so kann man nur vier dieser Gleichungen z. B. die vier erstern dazu benutzen, um sie nach den vier Unbekannten a, b, c, d aufzulösen. Die daraus gefundenen Werthe von a, b, c und d müssen dann, wenn sie statt (a, b), c und d substituirt werden, der 5ten und 6ten Gleichung genügen, d. h. diese letztern beiden Gleichungen identisch machen, und ist dies der Fall, so giebt die Gleichung 1.), sobald statt a, b, c, d dieselben so eben gefundenen Werthe gesetzt werden, die Lösung der Aufgabe.

Werden aber die letztern beiden Gleichungen mittelst der aus den vier erstern gefundenen Werthe von (a, b), c und d nicht alle beide identische d. h. richtige Gleichungen, so enthalten die 6 Gleichungen 3.) einen Widerspruch, welcher anzeigt, daß es keine Werthe von a, b, c, d giebt, welche alle 6 Gleichungen 3.) identisch machten, und daß man daher der Gleichung 2.) auf diesem Wege nicht genügen kann. S. §. 112.

Löst man aber die vier erstern der Gleichungen 3.) nach den Unbekannten a, b, c, d auf, so erhält man sogleich:

aus der ersten: $a = 3$;

aus der zweiten: $b = 7-3a = 7-9 = -2$;

aus der dritten: $c = -8-3b+a = 1$;

und aus der vierten: $d = 1-3c+b = -4$.

Und da diese Werthe die beiden folgenden der 6 Gleichungen 3.) wirklich identisch machen, so hat man gefunden (aus der 1.)

$$4)\quad \frac{3+7x-8x^2+x^3-13x^4+4x^5}{1+3x-x^2} = 3-2x+x^2-4x^3,$$

d. h. die verlangte Umformung ist bezweckt und das Resultat ist genau dasselbe, was man auch im §. 117. auf dem Wege gefunden hat, den man den Weg der „gemeinen oder gewöhnlichen Division" nennt. — Der jetzige Weg wird aber die „Methode der unbestimmten Koeffizienten" genannt, und obgleich wir solche hier nur an einem Beispiele nachgewiesen haben, so ist dies doch so geschehen, daß das allgemeine Verfahren erkennbar wird.

Anmerkg. Wenn aber die aus den vier erstern der 6 Gleichungen 3.) gefundenen Werthe der vier Unbekannten a, b, c, d, den übrigen Gleichungen nicht genügen, diese letzteren Gleichungen also einen Widerspruch, eine Unmöglichkeit des Verlangten angezeigt hätten, so wäre doch noch die Frage entstanden, ob man nicht die Gleichung 2.) auf einem anderen Wege zu einer richtigen (identischen) Gleichung machen könne durch schickliche Bestimmung der durch a, b, c, d bezeichneten noch unbekannten (unbestimmten) Koeffizienten, ohne gerade die einzelnen, mit gleichnamigen Potenzen von x versehenen Glieder einander gleich zu machen, — oder ob der gedachte Widerspruch allemal mit Nothwendigkeit die Unmöglichkeit der Aufgabe selbst anzeigt. Der folgende §. 121. wird zeigen, daß allemal das letztere angenommen werden muß.

§. 121.

I. Soll nämlich die Gleichung

$$A+Bx=0$$

bestehen, unabhängig von einem bestimmten Werth von x, — also, wie man gewöhnlich sagt, für jeden Werth von x, — so kann dies nur, und einzig nur dadurch geschehen, daß die Koeffizienten A, B, einzeln Null sind.

Denn, wäre nicht $B=0$, so wäre $x=-\frac{A}{B}$; also würde diese Gleichung $A+Bx=0$ nicht für jeden Werth von x existiren.

II. Soll die Gleichung

$$A+Bx+Cx^2 = 0$$

unabhängig von x bestehen, so muß einzeln $A=0$, $B=0$, $C=0$ sein.

Denn man gebe dem x nur drei verschiedene Werthe p, q und r, so hat man die drei Gleichungen

$$A+Bp+Cp^2 = 0,$$
$$A+Bq+Cq^2 = 0$$
und
$$A+Br+Cr^2 = 0.$$

Subtrahirt man nun diese Gleichungen paarweise von einander und dividirt man die Resultate durch $p-q$, $p-r$ oder $q-r$, so erhält man

$$B+C(p+q) = 0$$
$$B+C(p+r) = 0$$
oder auch
$$B+C(q+r) = 0.$$

Subtrahirt man aber diese Gleichungen wieder paarweise von einander, so erhält man

$$C(p-r) = 0 \quad \text{oder} \quad C(q-r) = 0 \quad \text{oder} \quad C(p-q) = 0,$$

während, da p, q, r verschieden von einander gedacht worden sind, weder $p-r$, noch $q-r$, noch $p-q$ der Null gleich ist; also muß $C=0$ sein. — Daraus folgt aber dann (nach I.) auch noch $B=0$ und $A=0$.

III. Ist

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3 = 0$$

unabhängig von x, d. h. für jeden Werth von x, so muß einzeln $A=0$, $B=0$, $C=0$ und $D=0$ sein.

Denn, sind p, q, r, s vier beliebige aber von einander verschiedene Werthe, so hat man die vier Gleichungen

$$A+Bp+Cp^2+Dp^3 = 0,$$
$$A+Bq+Cq^2+Dq^3 = 0,$$
$$A+Br+Cr^2+Dr^3 = 0,$$
$$A+Bs+Cs^2+Ds^3 = 0.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen von einander und durch Division der Resultate mit $p-q$, $p-r$, ꝛc. erhält man zunächst

$$B+C(p+q)+D(p^2+pq+q^2)=0,$$
$$B+C(p+r)+D(p^2+pr+r^2)=0,$$
$$B+C(p+s)+D(p^2+ps+s^2)=0.$$

Subtrahirt man diese wieder paarweise von einander, und dividirt man die Resultate durch $q-r$, $q-s$, so ergiebt sich

$$C+D(p+q+r)=0,$$
$$C+D(p+q+s)=0$$

und subtrahirt man hier noch einmal, so ergiebt sich $D(r-s)=0$, also $D=0$, weil r von s verschieden, doch weil $r-s$ **nicht** $=0$ gedacht worden ist. — Ist aber $D=0$, so ist

$$A+Bx+Cx^2=0$$

für jeden Werth von x, also ist (nach II.) auch nothwendig $C=0$, $B=0$ und $A=0$.

IV. Man sieht, wie dies Verfahren beliebig weit getrieben werden kann, so daß man als erwiesen ansehen kann, daß, wenn die Gleichung

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots+Kx^{n-2}+Lx^{n-1}+Mx^n=0$$

für jeden Werth von x bestehen soll, dies nur dann, und einzig nur dann möglich ist, wenn alle Koeffizienten einzeln gleich Null sind, wie groß auch der Exponent n sein mag.

V. Weil aber die Gleichung

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\cdots=A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\cdots$$

sogleich in diese andere

$$(A-A')+(B-B')x+(C-C')x^2+(D-D')x^3+\cdots=0$$

übergeht, so folgt, daß beide Gleichungen nur dann und einzig nur dann für jeden Werth von x gelten können, wenn einzeln $A-A'$, $B-B'$, $C-C'$, $D-D'$, ꝛc. ꝛc. der Null gleich sind,

d. h. wenn

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C', \quad D = D', \quad \text{rc. rc.} \quad \text{ist.}$$

§. 122.

Nimmt man diesen Satz zu Hilfe, so sieht man, daß die Gleichung 1.) oder 2.) im §. 120. nur dadurch von x unabhängig, also (nach x) identisch sein kann, wenn die 6 Gleichungen 3.) stattfinden, daß daher jeder Widerspruch, der sich in den gedachten 6 Gleichungen 3.) zeigte, nichts anders anzeigen könnte als eine Unmöglichkeit der Aufgabe selbst.

Man erhält also durch das Verfahren des §. 120. d. h. mittelst der „Methode der unbestimmten Koeffizienten" entweder die verlangte Lösung, wenn sie möglich ist, oder die Ueberzeugung, daß eine Lösung überhaupt nicht möglich ist.

§. 123.

Ist aber die gedachte Aufgabe nicht möglich, so kann man noch eine gebrochene Funktion suchen, welche zu der ganzen Funktion $a+bx+cx^2+dx^3$ addirt werden muß, um etwas zu erhalten, was der gegebenen gebrochenen Funktion gleich ist. — In diesem Falle, wo z. B. die gebrochene Funktion

$$\frac{3+7x-x^4+2x^5}{1+2x-x^2}$$

in die Summe

$$a+bx+cx^2+dx^3+fx^4+E_x$$

verwandelt werden soll, und wo wir a, b, c, d, f unabhängig von x uns denken, unter E_x aber die gebrochene Funktion verstehen, welche zu der vorhergehenden ganzen Funktion $a+bx+cx^2+dx^3+fx^4$ noch addirt werden muß, um den gesuchten Ausdruck zu haben, in diesem Falle also kann man a, b, c, d und f ganz beliebig nehmen und aus der Gleichung

1) $$\frac{3+7x-x^4+2x^5}{1+2x-x^2} = a+bx+cx^2+dx^3+fx^4+E_x$$

den letzten Unbekannten E_x dazu finden. Zu dem Ende schafft man zuerst den Quotienten (Bruch) weg, indem man mit $1+2x-x^2$ multiplicirt, und man erhält, indem man das Glied E_x zuerst multiplicirt,

2) $$3+7x-x^4+2x^5=(1+2x-x^2)\cdot E_x+$$

$$\begin{array}{r|r|r|r|r|r} a+b & x+c & x^2+d & x^3+f & x^4 & \\ +2a & +2b & +2c & +2d & +2f & x^5 \\ & -a & -b & -c & -d & -fx^6 \end{array}$$

Dies giebt dann

3) $$(1+2x-x^2)E_x=(3-a)+(7-b-2a)x-(c+2b-a)x^2$$
$$-(d+2c-b)x^3-(1+f+2d-c)x^4+(2-2f+d)x^5+fx^6;$$

und hieraus ergiebt sich für E_x die gebrochene Funktion, die gesucht wird, wenn man diese Gleichung durch $1+2x-x^2$ dividirt.

§. 124.

Aber eben weil alle Koeffizienten a, b, c, d, f ganz beliebig genommen werden können, so kann man sie unter anderen auch so annehmen, daß in dem Dividenden von E_x eben so viele Glieder der Null gleich werden, als man Koeffizienten hat, über welche man noch nach Belieben disponiren kann, also in dem vorliegenden Beispiele fünf Glieder. Dann aber kann man wieder unter anderen entweder

a) die (fünf) Glieder der Null gleich machen, welche die höchsten Potenzen von x enthalten, so daß nur die mit den niedrigsten Potenzen von x versehenen, übrig bleiben; oder

b) die (fünf) Glieder der Null gleich machen, welche die niedrigsten Potenzen von x enthalten, so daß bloß die mit den höchsten Potenzen von x versehenen Glieder übrig bleiben.

In dem erstern Fall a.) wird man also die einzelnen Koeffizienten der höchsten und gleichnamigen Potenzen von x, links und rechts der Gleichung 2.), einander gleich setzen, und zwar so viele Paare, als man zu bestimmende, also noch unbekannte

Koeffizienten hat, — diese gleichen Glieder links und rechts gegenseitig (aus der Gleichung 2.) weglassen, dann aber aus der übrig bleibenden Gleichung E_x vollends dazu finden. Dies giebt (in dem gedachten Beispiele) die (fünf) Gleichungen:

$$4)\quad \begin{cases} f = 0, \\ 2f-d = 2, \\ f+2d-c = -1, \\ d+2c-b = 0, \\ c+2b-a = 0, \end{cases}$$

aus denen, wenn man sie nach den (fünf) Unbekannten f, d, c, b und a auflöst,

$$f = 0, \quad d = -2, \quad c = -3, \quad b = -8 \text{ und } a = -19$$

gefunden wird. Substituirt man nun diese Werthe statt a, b, c, d und f in die Gleichung 2.) und läßt man die gleichen Glieder links und rechts weg, so erhält man

$$5)\qquad 3+7x = -19-46x+(1+2x-x^2)\cdot E_x$$

woraus noch

$$6)\qquad E_x = \frac{22+53x}{1+2x-x^2}$$

gefunden wird, und dadurch geht nun die Gleichung 1.) genau in die Gleichung ⊙. des §. 119. über.

Anmerkg. Dies Verfahren läßt zu gleicher Zeit noch deutlicher sehen, daß wenn der Dividend einer unecht gebrochenen Funktion vom m^{ten} Grade, der Divisor aber vom n^{ten} Grade ist, die ganze Funktion die darin steckt, d. h. zu der nur noch eine echt-gebrochene Funktion addirt werden darf, um eine Summe zu geben, welche der unecht-gebrochenen Funktion gleich ist, — jedesmal nur vom $(m-n)^{ten}$ Grade sein kann. — In dem vorliegenden Beispiel, wenn wir von vorne herein nur die Absicht gehabt hätten, die gegebene unecht gebrochene Funktion

$$\frac{3+7x-x^4+3x^5}{1+2x-x^2}$$

in die Summe aus einer ganzen Funktion und einer echt-gebrochenen zu verwandeln, — konnte man also im Voraus wissen, daß $f = 0$ werden muß, weil die ganze Funktion nur vom $(5-2)^{ten}$ d. h. 3^{ten} Grade sein konnte. Dann wurde die Rechnung noch um etwas einfacher, wenn man das Glied fx^4 gleich vom Anfang an nicht mehr hinzunahm. — Und wenn man hierauf noch die gehörige Rücksicht nimmt, so ist der gegenwärtige Weg, d. h. die „Methode der unbestimmten Koeffizienten", um eine unecht-gebrochene Funktion in eine ganze und eine echt-gebrochene Funktion zu zerlegen, dem Wege der „gewöhnlichen Division" des §. 118. in den meisten Fällen bei Weitem vorzuziehen.

Auch läßt die Methode der unbestimmten Koeffizienten zu gleicher Zeit sehen, daß, wie auch diese Zerlegung ausgeführt werden möge, doch nie zwei verschiedene Resultate sich ergeben können (nach §. 121.).

§. 125.

In dem Falle b.) des §. 124. wird man die niedrigsten Potenzen von x (in der Gleichung 2.) einander bezüglich gleich machen, man wird also den Unbekannten a, b, c, d, f solche Werthe gegeben sich denken, welche

$$7)\quad \begin{cases} 3 = a \\ 7 = b + 2a \\ 0 = c + 2b - a \\ 0 = d + 2c - b \\ \text{und}\quad -1 = f + 2d - c \end{cases}$$

machen. Aus diesen Gleichungen findet man dann

$$a = 3,\quad b = 1,\quad c = 1,\quad d = -1\quad \text{und}\quad f = 2.$$

Substituirt man aber nun diese Werthe statt a, b, c, d und f in die Gleichung 2.) und läßt man wieder auf beiden Seiten die gleichen Glieder weg, so erhält man

8) $$2x^5 = 5x^5 - 2x^6 + (1+2x-x^2) \cdot E_x$$

woraus gefunden wird

9) $$E_x = \frac{-3x^5+2x^6}{1+2x-x^2},$$

so daß die Gleichung 1.) jetzt übergeht in:

10) $$\frac{3+7x-x^4+3x^5}{1+2x-x^2} = 3+x+x^2-x^3+2x^4+\frac{-3x^5+2x^6}{1+2x-x^2},$$

und dasselbe Resultat haben wir auch im §. 118. auf dem „Wege der gewöhnlichen Division" gefunden.

Auch bei dieser Umformung (die man in den Anwendungen nicht selten dann eintreten läßt, wenn man weiß, daß x nur sehr kleine Werthe bekommen wird) ist die hiesige „Methode der unbestimmten Koeffizienten" dem „Wege der gewöhnlichen Division" als das bequemere vorzuziehen.

Anmerkg. Diese letztere Umformung einer gebrochenen Funktion in die Summe aus einer ganzen Funktion von einem beliebigen Grade und einer unecht-gebrochenen, welche nur höhere Potenzen von x im Zähler hat, als die ganze Funktion, — läßt sich auf jede gebrochene Funktion anwenden, sie mag unecht-gebrochen sein oder echt-gebrochen, und die ganze Funktion kann man stets bis zu jedem beliebigen Grade anwachsen lassen.

So findet man namentlich

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+ \cdots +x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x};$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+ \cdots +(-1)^n x^n+\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x};$$

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+ \cdots$$
$$+nx^{n-1}+\frac{(n+1)x^n-nx^{n+1}}{1-2x+x^2};$$

$$\frac{1}{1+2x+x^2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+ \cdots$$
$$+(-1)^{n-1} \cdot nx^{n-1}+(-1)^n \cdot \frac{(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1+2x-x^2};$$

u. s. w. f.

Und da man diese Umformung in eine Summe der letztern Art bis zu jedem n^{ten} Gliede fortsetzen kann, wie groß auch n sein mag, so ist hier gleichsam der Anfang gemacht einer Umformung in eine sogenannte unendliche Reihe, von welcher letzteren aber erst im 2ten Theile dieses Werkes die Rede sein soll.

Wir bemerken nur noch, daß, wenn in dem vorangehenden Paragraphen auch nur einzelne Beispiele behandelt sind, der Vortrag selbst den Leser doch in den Stand setzen wird, danach jedes andere Beispiel auf entsprechende Weise behandeln zu können.

Wir wollen jetzt zu andern Anwendungen der Algebra auf Buchstaben-Rechenkunst, d. h. auf die Umformung gegebener Ausdrücke namentlich gebrochener Funktionen übergehen.

Wenn wir nämlich im Früheren gelernt haben, Summen echt gebrochener Funktionen z. B.

$$\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+1} \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{3}{2x+1}$$

u. s. w. f. in eine neue gebrochene Funktion zu verwandeln (was man das Addiren der Quotienten oder der Brüche nennt, so daß man leicht findet:

$$\frac{2}{2x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)}=\frac{4x+1}{2x^2+x-1};$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{3}{2x+1}=\frac{5x^2+x-3}{(x-1)(x+1)(2x+1)}=\frac{5x^2+x-3}{2x^3+x^2-2x-1}\Big),$$

so ist doch die umgekehrte Aufgabe, nämlich die gebrochenen Funktionen z. B. $\frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)}$ oder $\frac{5x^3+x-3}{(x-1)(x+1)(2x+1)}$, u. dergl., wieder in die einfachsten gebrochenen Funktionen zu zerlegen, von der Art, daß zu ihrer Lösung die Algebra verwandt werden muß. — Solche Aufgaben wollen wir aber jetzt betrachten.

§. 126.

Soll z. B. die echt-gebrochene Funktion $\frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)}$ in

die beiden Theilbrüche zerlegt werden, welche $2x-1$ und $x+1$ zu Nennern haben, so sind diese Theile offenbar wiederum echt-gebrochene Funktionen (in denen keine ganze Funktion steckt); folglich sind die gesuchten Zähler, von x unabhängig (nach x constant) und man kann sie einstweilen durch A und B bezeichnen, so daß A und B die zu bestimmenden Unbekannten sind. Man hat also die Gleichung

$$1)\qquad \frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}$$

und aus dieser Gleichung (die aber für jeden Werth von x gilt, und aus welcher, indem man statt x die verschiedensten Werthe substituirt, unendlich viele einzelne Gleichungen hervorgehen), — müssen nun die Werthe der Unbekannten A und B gefunden werden.

Erstes Verfahren. Multiplicirt man die Gleichung 1.) mit dem Divisor zur Linken, so erhält man zunächst

$$2)\qquad 4x+1 = A(x+1)+B(2x-1);$$

dann, wenn man rechts nach x ordnet,

$$3)\qquad 4x+1 = (A+2B)x+(A-B);$$

hieraus aber, weil die Gleichung unabhängig von x, d. h. für jeden Werth von x richtig sein soll (nach §. 121.)

$$4)\qquad 4 = A+2B \quad \text{und} \quad 5)\qquad 1 = A-B.$$

Dies sind nun die beiden Gleichungen (4. und 5.), aus denen die beiden Unbekannten A und B gefunden werden müssen. — Löst man sie aber (nach den §§. 100.—102.) auf, so erhält man $B=1$ und $A=2$, so daß man gefunden hat

$$6)\qquad \frac{4x+1}{(2x-1)(x+1)} = \frac{2}{2x-1} + \frac{1}{x+1}.$$

Dieses Verfahren läßt noch erkennen, daß, wenn überhaupt eine Auflösung unserer Aufgabe möglich ist, dann allemal auch nur eine einzige Auflösung existirt (nach §. 121.).

Das zweite Verfahren stützt sich auf diese letztere Betrachtung. Man verschafft sich abermals die Gleichung 2.), nämlich

$$2)\qquad 4x+1 = A(x+1)+B(2x-1),$$

giebt aber dann dem x ganz beliebige Werthe. Man setze z. B. 0, 1, 2, 3, −2, −3, u. dergl. statt x, so daß man erhält (aus 2.) bezüglich

$$7)\qquad \left\{\begin{aligned} 1 &= A-B \\ 5 &= 2A+B \\ 9 &= 3A+3B \\ 13 &= 4A+5B \\ -7 &= -A-5B \end{aligned}\right.$$

u. s. w. f.

Da nun alle diese Gleichungen 7.) richtige (identische) Gleichungen sein müssen, so geben irgend zweie davon, wenn man sie nach A und B algebraisch auflöst (nach §. 100.) die richtigen Werthe für A und B.

Von diesen Gleichungen 7.) nimmt man also irgend zweie, welche man will, und löst sie nach A und nach B algebraisch auf (nach den §§. 100.—102.) und man hat die gesuchten Werthe von A und B. — Man findet dann dasselbe Resultat was in 6.) schon steht.

Drittes Verfahren. Aber eben weil man zur Bestimmung der Werthe von A und von B nur zwei Gleichungen braucht und diese erhalten werden, wenn man in der Gleichung 2.) d. h. in

$$2)\qquad 4x+1 = (x+1)\cdot A+(2x-1)\cdot B$$

dem x zwei beliebige von einander verschiedene Werthe giebt, so wird man am bequemsten solche Werthe statt x setzen, welche die nach den Unbekannten A und B aufzulösenden Gleichungen möglichst einfach machen. Dies letztere ist aber der Fall, so bald man x jedesmal so wählt, daß einmal B und das andere

Mal A sogleich eliminirt wird. Man wird also (in 2.) statt x einmal den Werth $\frac{1}{2}$ setzen, welcher den Koeffizienten $2x-1$ von B, der Null gleich macht (und welcher aus der Gleichung $2x-1=0$ gefunden wird) und dies giebt die Gleichung

$$3=\frac{3}{2}A \quad \text{oder} \quad A=2;$$

dann aber wird man (in 2.) statt x den Werth -1 setzen, welcher den Koeffizienten $x+1$ von A, der Null gleich macht (und den man aus der Gleichung $x+1=0$ findet) und dies führt zu der Gleichung

$$-3=-3B \quad \text{oder} \quad B=1.$$

So hat man dasselbe Resultat 6.) noch einmal gefunden und dasmal auf die allerbequemste Weise.

§. 127.

Sollen, um noch ein zusammengesetzteres Beispiel zu geben, die Zähler A, B, C so gefunden werden, daß

$$1)\qquad \frac{5x^2+x-3}{(x-1)(x+1)(2x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{2x+1}$$

wird, d. h. soll die echt-gebrochene Funktion zur Linken in die drei einfachsten gebrochenen Funktionen zur Rechten zerlegt werden, so schaffe man wieder zunächst die Brüche weg und man erhält

$$2)\qquad 5x^2+x-3=(2x+1)(x+1)\cdot A+(2x+1)(x-1)\cdot B +(x+1)(x-1)\cdot C.$$

Erstes Verfahren. Ordnet man zur Rechten nach x, so erhält man (aus 2.) zunächst

$$3)\qquad 5x^2+x-3=(2A+2B+C)x^2+(3A-B)x+(A-B-C).$$

Weil aber diese Gleichung für jeden Werth von x gelten soll, so müssen (nach §. 121.) die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von x links und rechts einander gleich sein und dies führt zu den drei Gleichungen

$$4) \quad \begin{cases} 5 = 2A + 2B + C, \\ 1 = 3A - B, \\ -3 = A - B - C. \end{cases}$$

Löst man nun diese drei Gleichungen 4.) nach den drei Unbekannten auf*), so erhält man $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ und $C = 3$, so daß die Gleichung 1.) übergeht in

$$\frac{5x^2 + x - 3}{(x-1)(x+1)(2x+1)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{3}{2x+1}$$

und somit die Zerlegung bewirkt ist.

Zweites Verfahren. Man gebe in der Gleichung 2.) dem x irgend drei verschiedene Werthe, z. B. die Werthe 0, $\frac{1}{2}$ und 2, und man hat die 3 Gleichungen, nämlich

$$-3 = A - B - C,$$
$$-\tfrac{5}{4} = 3A - B - \tfrac{3}{4}C,$$
$$19 = 15A + 5B + 3C,$$

aus denen die drei Unbekannten A, B, C gerade so wie vorher gefunden werden, wenn man diese Gleichungen (nach §. 105.) auflöst.

Drittes Verfahren. Man gebe in der Gleichung 2.) dem x nach und nach solche 3 Werthe, welche die einzelnen Nenner $x-1$, $x+1$ und $2x+1$ der Theilbrüche, der Null gleich machen, welche also bezüglich aus den 3 Gleichungen $x-1=0$, $x+1=0$ und $2x+1=0$ für x gefunden werden. Dies führt zu den 3 einfachsten Gleichungen, nämlich

---

*) Addirt man die erste und dritte der Gleichungen 4.), so hat man eine zweite Gleichung ohne C, nämlich $2 = 3A + B$. — Addirt man diese wieder zu der mittlern der Gleichungen 4.), nämlich zu $1 = 3A - B$, so ergiebt sich sogleich $3 = 6A$, also $A = \frac{1}{2}$. — Eine der beiden letztern Gleichungen giebt $B = \frac{1}{2}$ dazu, während dann die erste oder die dritte der Gleichungen 4.) den Werth C dazu liefert, nämlich $C = 3$.

für $x = 1$, ... $3 = 6A$, folglich $A = \frac{1}{2}$,

für $x = -1$, ... $1 = 2B$, also $B = \frac{1}{2}$,

für $x = -\frac{1}{2}$, ... $-\frac{9}{4} = -\frac{3}{4}C$, also $C = 3$.

Dies ist wiederum die einfachste Lösung.

§. 128.

Als neues Beispiel der Anwendung der Algebra sei die echt-gebrochene Funktion

$$\frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1},$$

deren Nenner x^4-1 in das Produkt $(x^2-1)\cdot(x^2+1)$ sich zerlegt, in die Summe zweier Theilbrüche $\frac{M}{x^2-1}+\frac{N}{x^2+1}$ zu zerlegen. — Diese Theilbrüche sind zwar echt-gebrochene Funktionen, aber weil ihr Nenner vom zweiten Grade ist, so kann ihr Zähler vom ersten Grade sein. Man muß also M von der Form $Ax+B$ und N von der Form $Cx+D$ voraussetzen, wenn A, B, C, D von x unabhängig (nach x constant) angenommen werden sollen.

Man hat also die von x unabhängigen Werthe von A, B, C, D so zu finden, daß

$$1) \quad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

wird. — Schafft man hier die Brüche weg, indem man die Gleichung mit $(x^2-1)(x^2+1)$ d. h. mit x^4-1 multiplicirt, so erhält man:

$$2) \quad 2x^3-3x^2+x-2 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1).$$

Erstes Verfahren. Ordnet man nun rechts nach Potenzen von x, so erhält man

$$3) \quad 2x^3-3x^2+x-2 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A-C)x+(B-D)$$

und hieraus folgt (nach §. 121.)

$$4)\quad \begin{cases} 2 = A + C \\ -3 = B + D \\ 1 = A - C \\ -2 = B - D \end{cases}$$

Löst man nun diese vier Gleichungen nach den vier Unbekannten A, B, C und D auf, so findet sich

$$A = \tfrac{3}{2}, \quad C = \tfrac{1}{2}, \quad B = -\tfrac{5}{2} \text{ und } D = -\tfrac{1}{2},$$

so daß die Gleichung 1.) nun übergeht in

$$5)\quad \frac{2x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^4 - 1} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{3x - 5}{x^2 - 1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Zweites Verfahren. Man gebe in der Gleichung 2.) dem x vier verschiedene Werthe z. B. 0, 1, –1, und 2, so erhält man die vier Gleichungen

$$6)\quad \begin{cases} \text{für } x = 0 \cdots & -2 = B - D, \\ \text{für } x = 1 \cdots & -2 = 2A + 2B, \\ \text{für } x = -1 \cdots & -8 = -2A + 2B, \\ \text{für } x = 2 \cdots & 4 = 10A + 5B + 6C + 3D. \end{cases}$$

Löst man nun diese vier Gleichungen nach den vier Unbekannten A, B, C, D auf*), so erhält man dasselbe, was vorher.

Anmerkg. Weil in dem letztern Beispiel der Nenner $x^2 - 1$ wiederum in das Produkt $(x-1)(x+1)$ verwandelt werden kann, so kann man auch den eben gefundenen Summanden

$$\frac{3x - 5}{x^2 - 1}$$

wiederum zerlegen in $\frac{E}{x-1} + \frac{F}{x+1}$; man erhält dann, sobald

*) Man löse erst die beiden mittlern nach A und B auf, so daß man zuerst $A = \frac{3}{2}$ und $B = -\frac{5}{2}$ erhält; dann setzt man diese Werthe in die erste und vierte Gleichung und findet dann aus der ersten erst D und zuletzt aus der vierten noch C dazu.

genau so wie im §. 126. verfahren wird, $E=-1$ und $F=4$, so daß die Gleichung 5.) noch übergeht in

$$7)\qquad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x^2+1}.$$

Man konnte aber auch direkt die von x unabhängigen Unbekannten A, B, C, D so suchen, daß

$$8)\qquad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

eine richtige Gleichung wird. — Schafft man nämlich die Brüche weg, so erhält man

$$9)\qquad 2x^3-3x^2+x-2$$
$$= A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)(x+1).$$

Ordnet man hier rechts nach Potenzen von x und setzt man dann die einzelnen Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von x links und rechts einander gleich, so erhält man die vier Gleichungen zwischen den vier Unbekannten A, B, C, D, deren algebraische Auflösung die Werthe dieser letztern liefert.

Als zweites Verfahren kann man aber auch in der Gleichung 9.) dem x vier verschiedene Werthe geben z. B. 1, –1, 0 und 2; und man erhält dann diese vier Gleichungen

$$10)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad x=1 \cdots & -2=4A, \\ \text{für}\quad x=-1 \cdots & -8=-4B, \\ \text{für}\quad x=0 \cdots & -2=A-B-D, \\ \text{für}\quad x=2 \cdots & 4=15A+5B+6C+3D, \end{cases}$$

welche, wenn sie nach A, B, C und D algebraisch aufgelöst werden, dasselbe Resultat liefern, wie das vorbeschriebene Verfahren.

§. 129.

Betrachten wir dieselbe gebrochene Funktion

$$\frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1}$$

noch einmal. Der Nenner x^4-1 zerlegt sich auch in das Produkt der beiden Faktoren $x-1$ und x^3+x^2+x+1; und man kann daher diese gegebene gebrochene Funktion auch zerlegen in die Summe

$$\frac{A}{x-1}+\frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+x^2+x+1}$$

wo B, C, D von x unabhängig sind, und wo man den Zähler Bx^2+Cx+D vom 2^{ten} Grade annehmen mußte, weil der Nenner vom 3^{ten} Grade ist, die Funktion selbst (wie die zu zerlegende d. h. wie die gegebene) echt-gebrochen sein muß, und es eine unberechtigte Voraussetzung sein würde, wenn man von vorne herein annehmen wollte, daß der ganze Zähler dieses 2^{ten} Theilbruches nur vom 1^{ten} Grade oder gar vom 0^{ten} Grade d. h. von x ganz unabhängig (nach x constant) sein werde; tritt nämlich einer dieser letztern Fälle ein, so wird und muß dies die Rechnung selbst dadurch zeigen, daß man $B=0$, oder auch noch $C=0$ findet.

Man findet aber aus der Gleichung

$$1)\qquad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx^2+Cx+D}{x^3+x^2+x+1},$$

wenn man die Brüche wegschafft und entweder das erste oder das andere Verfahren eintreten läßt, sofort

$$A=-\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{5}{2},\quad C=0 \quad \text{und} \quad D=\tfrac{3}{2}.$$

Die Gleichung 1.) geht dadurch über in:

$$2)\qquad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1}=-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{5x^2+3}{x^3+x^2+x+1}.$$

Und weil der zweite Summand abermals eine echt-gebrochene Funktion ist, deren Nenner x^3+x^2+x+1 sich wieder in $(x+1)(x^2+1)$ zerlegt, so kann derselbe auf's Neue in die Summe $\frac{E}{x+1}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$ zerlegt werden, wo E, F und G von x unabhängig sind. Wird nun diese Zerlegung ausgeführt, so erhält man genau wieder das früher gefundene Resultat.

§. 130.

Der Umstand, daß die gesuchten Unbekannten A, B, C, D, E, F, G, ꝛc. ꝛc. stets von x unabhängig sind, ist die Hauptursache des Gelingens der von uns hier beschriebenen Verfahrungsarten, um gebrochene Funktionen in ihre Theilbrüche zu zerlegen. Denn nur wenn die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von x, von diesem x selbst ganz unabhängig sind, müssen in einer solchen Gleichung wie

$$a+bx+cx^2+dx^3+\cdots = a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\cdots,$$

die Koeffizienten der gleichnamigen Potenzen von x, links und rechts, (nach §. 121.) einzeln einander gleich sein, außerdem nicht. Und nur, wenn die Werthe der Koeffizienten A, B, C, ꝛc. ꝛc. von x unabhängig sind, hat man immer dieselben Unbekannten, obgleich man statt x nach und nach ganz verschiedene Werthe setzt.

Am deutlichsten wird dies in die Augen fallen, wenn wir absichtlich solche Unbekannte einführen, welche selbst noch Funktionen von x, d. h. von x abhängig sind.

Wir wählen zu dem Ende dasselbe hier vorliegende Beispiel, suchen also A und Z_x so, daß

$$1)\qquad \frac{2x^3-3x^2+x-2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Z_x}{x^3+x^2+x+1}$$

wird, wobei wir von dem Zähler A wissen, daß er von x unabhängig sein muß, weil sonst $\frac{A}{x-1}$ keine echtgebrochene Funktion sein würde. Von dem Zähler Z_x aber wissen wir, daß er von x abhängig, d. h. eine Funktion von x sein wird, weshalb wir auch unten das x anhängen als Zeiger, durch den wir stets an diesen Umstand erinnert werden sollen. — Schafft man aber aus der Gleichung 1.) die Brüche weg, dadurch, daß man sie mit x^4-1 multiplicirt, so erhält man

$$2)\qquad 2x^3-3x^2+x-2 = (x^3+x^2+x+1)\cdot A + (x-1)\cdot Z_x.$$

Setzt man nun hier 1 statt x, so daß $x-1=0$ wird, so mag Z_x irgend einen Werth annehmen, das Produkt $(x-1)\cdot Z_x$ wird aber doch der Null gleich; und die Gleichung 2.) giebt für $x=1$,

3) $\qquad -2=4A \qquad$ oder $\quad A=-\frac{1}{2}$.

Wollte der Anfänger nun etwa $x=-1$ setzen, in der Hoffnung, daß (weil dann x^3+x^2+x+1, als das Produkt $(x+1)(x^2+1)$, der Null gleich wird) aus der Gleichung 2.) das mit A versehene Glied herausfällt und daher dann sogleich Z_x gefunden werden kann, so würde man sich sehr irren; denn die Gleichung 2.) geht für $x=-1$ in

4) $\qquad -8=-2\cdot Z_{-1}$

über, wenn Z_{-1} den Werth vorstellt, welchen die Funktion Z_x annimmt, sobald -1 statt x gesetzt wird. Die Gleichung 4.) liefert daher sogleich diesen Ziffernwerth $Z_{-1}=4$, aber nicht die von uns gesuchte Funktion Z_x.

Um letztere zu finden, darf man dem x keinen besonderen Werth beilegen, wie wir so eben gesehen haben, eben weil man dadurch immer nur den Ziffernwerth finden würde, den die Funktion Z_x annimmt, für diesen besonderen Werth von x und nicht die Funktion Z_x selbst. Man kann sie aber jetzt leicht aus den beiden Gleichungen 2.) und 3.) finden, indem man den Werth für A aus der Gleichung 3.) in die Gleichung 2.) substituirt und dann aus letzterer Gleichung Z_x ohne Weiteres findet. Man findet auf diesem Wege

$$Z_x=\frac{2x^3-3x^2+x-2+\frac{1}{2}(x^3+x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{5x^3-5x^2+3x-3}{x-1}=\frac{1}{2}\cdot(5x^2+3),$$

so daß nun die Gleichung 1.) genau in das bereits §. 129. N. 2. gefundene Resultat übergeht.

Anmerkung. Wir kommen im 4ten Theile dieses Werkes

auf die Zerlegung der echtgebrochenen Funktionen in ihre Theil-Brüche noch einmal zurück, nachdem vorher nachgewiesen sein wird, daß jede ganze Funktion vom n^{ten} Grade sich allemal in n Faktoren von der Form $(x+a)(x+b)(x+c)\cdots$ zerlegen läßt, während diese Faktoren im Allgemeinen alle von einander verschieden, im besonderen aber theilweise, ja selbst alle einander gleich sein können, in welchem letztern Falle die Form der Theilbrüche eine von der im erstern Fall sich ergebenden etwas verschieden sein muß.

Neuntes Kapitel.

Von den allgemeinen Quadrat-Wurzeln. Von den imaginären Quadrat-Wurzeln. Auflösung der quadratischen Gleichungen. Eigenschaften der ganzen Funktionen vom 2ten Grade.

Erste Abtheilung.

Von den allgemeinen und imaginären Quadratwurzeln. Auflösung der quadratischen Gleichungen.

§. 131.

Der ganzen Potenz a^n, in welcher der Exponent n eine wirklich (ganze) Zahl ist, während der Dignand a bereits ganz allgemein gedacht wird und welche ein Produkt von n Faktoren vorstellt, von denen jeder a ist (§. 64.), — dieser ganzen Potenz also, steht gegenüber die ganze Wurzel

$$\sqrt[n]{a},$$

in welcher der Wurzel-Exponent n ebenfalls eine wirkliche (ganze) Zahl vorstellt, während der Radikand wiederum bereits ganz allgemein gedacht wird; — und wir drücken durch diese ganze Wurzel, d. h. durch dieses Zeichen $\sqrt[n]{a}$, die Eigenschaft aus (also jeden Ausdruck, welcher diese Eigenschaft hat), mit n potenzirt, a zu geben.

Da man das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ für den Fall, wo n ganz allgemein ist, in den Kalkul nicht einzuführen pflegt, so nennt man gewöhnlich die so eben definirte ganze Wurzel $\sqrt[n]{a}$, in wel-

cher bloß a ganz allgemein gedacht ist, schon die **allgemeine Wurzel**, obgleich in ihr n noch eine wirkliche ganze Zahl vorstellt.

Ihr Gegensatz ist die **absolute Wurzel** $\sqrt[n]{a}$ (des §. 71.), in welcher a eine absolute (ganze oder gebrochene) Zahl vorstellt, — und welche selbst allemal eine (einzige) absolute Zahl bedeutet.

Diese Definition der allgemeinen (oder ganzen) Wurzel ist vollkommen ausgedrückt in der Gleichung

$$(\odot)\cdots \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

Anmerkg. Diese Definition der allgemeinen Wurzel ist ganz analog mit den Definitionen der allgemeinen Differenz $a-b$ und des allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$ (in den §§. 19. und 34.) aufgefaßt, nach welchen unter den letzteren Zeichen die Eigenschaft vorgestellt wird, — also auch jeder Ausdruck, der diese Eigenschaft hat, — nämlich bezüglich zu b addirt, oder mit b multiplicirt, a zu geben; so daß die letzteren Definitionen in den Gleichungen

$$(a-b)+b = a \quad \text{und} \quad \frac{a}{b}\cdot b = a$$

ausgedrückt waren. — Aber so wie wir im §. 35. unmittelbar nach der Aufstellung der Definition des allgemeinen Quotienten die Frage vorgelegt haben und beantworten mußten, ob der allgemeine Quotient $\frac{a}{b}$ **eindeutig** oder **mehrdeutig** sei, d. h. ob die Ausdrücke, welche die durch $\frac{a}{b}$ vorgestellte Eigenschaft haben, nämlich mit b multiplicirt, a zu geben, — alle nothwendig einander gleich sein müssen oder nicht, — eben so müssen wir hier zunächst untersuchen, ob die Ausdrücke, welche mit n potenzirt, a geben, alle einander gleich sein müssen (in welchem Falle die

$\sqrt[n]{a}$ eindeutig genannt würde) oder nicht (in welchem Falle die $\sqrt[n]{a}$ mehrdeutig genannt werden müßte).

§. 132.

Sind aber α und β zwei Ausdrücke, welche die durch die allgemeine n^{te} Wurzel aus a, nämlich durch das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ vorgestellte Eigenschaft haben, — d. h. sind α und β zwei solche Ausdrücke, daß

1) $\alpha^n = a$ und auch 2) $\beta^n = a$

ist, so hat man hieraus sogleich

3) $\alpha^n = \beta^n$, also 4) $\beta^n - \alpha^n = 0$.

Nun ist aber

$$\beta^2-\alpha^2 = (\beta-\alpha)\cdot(\beta+\alpha),$$
$$\beta^3-\alpha^3 = (\beta-\alpha)\cdot(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2),$$
$$\beta^4-\alpha^4 = (\beta-\alpha)\cdot(\beta^3+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha^3),$$
$$\beta^5-\alpha^5 = (\beta-\alpha)\cdot(\beta^4+\alpha\beta^3+\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta+\alpha^4),$$

u. s. w. f.; und allgemein

5) $\beta^n-\alpha^n = (\beta-\alpha)(\beta^{n-1}+\alpha\beta^{n-2}+\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-1})$

wie man sogleich findet, wenn man $\beta^2-\alpha^2$ oder $\beta^3-\alpha^3$, oder $\beta^4-\alpha^4$, oder $\beta^5-\alpha^5$, oder $\beta^n-\alpha^n$ als ganze Funktionen von β, nach der Methode des §. 117. oder nach der des §. 120. durch die ganze Funktion von β vom 1^{ten} Grade, nämlich durch $\beta-\alpha$, dividirt.

Der Gleichung 4.), in so ferne der Ausdruck zu ihrer Linken in das Produkt zur Rechten der N. 5. zerlegt wird, wird also genügt sowohl, wenn der eine der Faktoren dieses Produkts der Null gleich wird, als auch wenn dies mit dem anderen Faktor der Fall ist. Es ist daher entweder

6) $\beta-\alpha=0$, also $\beta=\alpha$,

oder

7) $\beta^{n-1}+\alpha\beta^{n-2}+\alpha^2\beta^{n-3}+\cdots+\alpha^{n-3}\beta^2+\alpha^{n-2}\beta+\alpha^{n-1}=0.$

Dieser anderen Gleichung 7.) genügt man aber nicht mehr, wenn man $\beta=\alpha$ setzt (den einzigen Fall abgerechnet, wo $\beta=\alpha=0$, also dann auch $a=0$ wäre).

Es scheint daher β auch von α verschieden (d. h. dem α nicht gleich) sein zu können, d. h. es scheint $\sqrt[n]{a}$ mehrdeutig sein zu können und daher nicht eindeutig sein zu müssen.

Diese Vermuthung erheben wir zunächst in dem Falle, wo n eine gerade Zahl ist (also $n-1$ eine ungerade) zur völligen Gewißheit, indem in die Augen fällt, daß dann der Gleichung 7.) durch $\beta=-\alpha$ genügt wird, weil sie dann (nach §. 66. N. 4.) in

$$-\alpha^{n-1}+\alpha^{n-1}-\alpha^{n-1}+\alpha^{n-1}-\cdots-\alpha^{n-1}+\alpha^{n-1}=0$$

übergeht, welche offenbar eine richtige Gleichung (d. h. eine identische) ist.

So oft also n eine gerade Zahl ist, so oft hat die allgemeine n^{te} Wurzel aus a d. h. das Zeichen $\sqrt[n]{a}$, mindestens zwei Werthe, d. h. es giebt mindestens zwei Ausdrücke (zwei Formen), nämlich die Summe $0+\sqrt[n]{a}$ d. h. $+\sqrt[n]{a}$ und noch die Differenz $0-\sqrt[n]{a}$ d. h. $-\sqrt[n]{a}$ (S. §. 25.), welche einander nicht gleich sind, welche aber die Eigenschaft mit einander gemein haben, nämlich mit der (geraden) Zahl n potenzirt, a zu geben.

Wenn sich aber auch später wird zeigen lassen, daß es im Allgemeinen allemal n und nie mehr Ausdrücke (Formen, angezeigte Operationen) giebt, von denen keiner dem andern gleich ist, die aber alle die durch $\sqrt[n]{a}$ vorgestellte Eigenschaft mit einander gemein haben, — daß also $\sqrt[n]{a}$ als n-deutig angesehen und behandelt werden muß, — so sind wir doch hier (wegen der zur Zeit noch mangelnden Vorkenntnisse) gezwungen, langsam nur vorzuschreiten und die Untersuchungen erst für die einzelnen Werthe 2, 3, 4 von n weiter zu verfolgen.

§. 133.

Nimmt man nun zunächst $n=2$, so wird die allgemeine Wurzel jetzt diese

$$\sqrt[2]{a} \quad \text{und gewöhnlich bloß durch} \quad \sqrt{a}$$

vorgestellt, indem man den Wurzel-Exponenten 2 nicht schreibt, sondern ihn sich bloß hinzudenkt.

Diese allgemeine zweite Wurzel aus a wird auch die allgemeine Quadratwurzel genannt, in so ferne man auch die zweite Potenz (a^2) von a das Quadrat von a zu nennen pflegt, und auch sagt: man quadrire b, wenn man b mit 2 potenzirt, d. h. die zweite Potenz b^2 sich denkt und dieses Zeichen hinschreibt (§§. 7. 16.).

Die allgemeine Quadratwurzel $\sqrt{a}$, stellt also jeden Ausdruck (jede Form, jede Reihe angezeigter Operationen) vor, welcher mit 2 potenzirt (d. h. quadrirt), a giebt; und es giebt immer (nach §. 131.) zwei Ausdrücke, nämlich die Summe $0+\sqrt{a}$ oder $+\sqrt{a}$, und die Differenz $0-\sqrt{a}$ oder $-\sqrt{a}$ (§. 25.), welche einander nicht gleich sind (den besonderen Fall ausgenommen, in welchem $a=0$ sein sollte), welche aber die durch $\sqrt{a}$ ausgedrückte Eigenschaft, — nämlich quadrirt, a zu geben, — mit einander gemein haben.

Es giebt aber auch nur zwei solche Ausdrücke und keinen dritten. — Sind nämlich α und $-\alpha$ diese zwei Ausdrücke, und β irgend ein dritter, der dieselbe Eigenschaft hat, so hat man

außer $\alpha^2 = a$ auch noch $\beta^2 = a$,

also $\beta^2 = \alpha^2$ d. h. $\beta^2-\alpha^2 = 0$,

d. h. $(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = 0$,

woraus

entweder $\beta-\alpha = 0$ oder $\beta+\alpha = 0$

hervorgeht, d. h.

entweder $\beta = \alpha$ oder $\beta = -\alpha$;

so daß dieser dritte Ausdruck β einem der beiden ersten Ausdrücke, entweder dem $+\alpha$ oder dem $-\alpha$, gleich sein muß.

Die allgemeine Quadratwurzel $\sqrt{a}$, in welcher a ganz allgemein (als ein bloßer Träger des Operationszeichens) gedacht wird, ist daher allemal zweiförmig, oder, wie man gewöhnlicher sagt, zweideutig, den einzigen Fall abgerechnet, in welchem $a = 0$ ist und in welchem die beiden Formen $+\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$ in $+0$ und -0 übergehen, während $+0$ und -0 einander gleich und $= 0$ sind. — In diesem Ausnahmsfalle sagt man: „die beiden Werthe der allgemeinen Quadratwurzel seien einander gleich."

§. 134.

Wird in der allgemeinen Quadratwurzel $\sqrt{a}$, unter a eine specielle Zahlform gedacht (so daß a nicht mehr ganz allgemein ist) und zwar die (im §. 44. definirte) reelle Zahl, so sind drei Fälle zu betrachten: 1) wenn a positiv (ganz oder gebrochen), 2) wenn $a = 0$, und 3) wenn a negativ (ganz oder gebrochen) ist.

Im erstern Fall, wo a positiv ist, läßt sich allemal (nach den §§. 71. 86.—88.) eine absolute Zahl α finden, welche die durch $\sqrt{a}$ ausgedrückte Eigenschaft hat; — und die beiden Werthe der $\sqrt{a}$ sind dann ausgedrückt durch $\pm\alpha$; der eine dieser Werthe ist positiv und ist dem absoluten α gleich, der andere dagegen ist negativ.

Im anderen Falle, wo $a = 0$, ist auch $\alpha = 0$ und der Ausdruck $\pm\alpha$ drückt jetzt noch immer die beiden Werthe der $\sqrt{a}$ aus, nur daß sie beide einander gleich sind und $= 0$.

Im dritten Falle endlich, wo a negativ gedacht wird, also etwa

$$a = -b,$$

während b wieder eine absolute Zahl vorstellt, — giebt es keine reelle Zahl, welche mit 2 potenzirt (quadrirt), die negative Zahl a d. h. $-b$ erzeugen könnte (weil auch jede negative Zahl,

sobald sie quadrirt, d. h. mit sich selber multiplicirt wird, etwas positives giebt). — In diesem Falle bleibt also $\sqrt{a}$ oder $\sqrt{-b}$ eine selbstständige Wurzel, in so ferne keine der früheren speciellen Zahlformen d. h. keine reelle Zahl (im Sinne des §. 44.) für sie gesetzt werden kann.

Jeden aus wirklichen (ganzen, unbenannten) Zahlen mittelst der Operationszeichen zusammengesetzten Ausdruck, der keiner reellen Zahl (im Sinne des §. 44.) gleich ist, nennen wir zum Unterschiede eine imaginäre Zahl. — Deshalb ist $\sqrt{-b}$ eine imaginäre Zahl, sobald $-b$ eine negative (ganze oder gebrochene) Zahl ist. — Auch sie ist natürlich zweideutig (zweiförmig), weil sie auch nur ein besonderer Fall der allgemeinen Quadratwurzel ist und ihre beiden Formen sind durch $\pm\sqrt{-b}$ vorgestellt, d. h. durch die Summe $0+\sqrt{-b}$ und durch die Differenz $0-\sqrt{-b}$ (S. §. 25.).

Anmerkg. 1. Als wir früher (im §. 19.) die allgemeine Differenz $a-b$ einführten, zeigte sie sich in besonderen Fällen entweder einer frühern Form (der ganzen Zahl) gleich oder nicht; im letzteren Falle blieb sie selbstständig und war entweder auf die selbstständige Form $0=(q-q)$ oder auf die selbstständige Form $0-\alpha$ oder $-\alpha$ zurückzuführen, welche wir dann eine negative ganze Zahl nannten. — Als dann später (im §. 34.) der allgemeine Quotient $\frac{a}{b}$ eingeführt wurde, zeigte sich solcher in besonderen Fällen entweder einer frühern Form (nämlich der ganzen positiven oder der ganzen negativen Zahl oder der Null) gleich oder nicht; im letztern Falle blieb der Quotient $\frac{a}{b}$ selbstständig und war dann auf die drei selbstständigen Formen zurückzuführen, welche wir absolut gebrochene und positiv oder negativ gebrochene Zahlen nannten. — Hier nun ist die allgemeine Quadratwurzel in ihren besonderen Fällen ebenfalls entweder einer früheren Form (der reellen Zahl) gleich

oder nicht; im letztern Falle bleibt auch sie selbstständig und wird dann imaginäre Zahl genannt. — Die negativen, die gebrochenen und die imaginären Zahlen stehen daher in einer und derselben Kategorie und sind entweder gleich wirklich oder gleich eingebildet, — nämlich als Rechnungsformen gleich wirklich und als Größen gleich eingebildet.

Anmerkg. 2. Wir fügen der größeren Deutlichkeit wegen hier noch folgendes hinzu:

1) So lange die Differenz $a-b$ allgemein ist, ist sie weder einer positiven noch einer negativen Zahl gleich und auch nicht der Null; denn so wie sie einem dieser letztgenannten Ausdrücke gleich ist, so hat man einen besonderen Fall, während z. B. die Differenz $3-2\sqrt{-1}$ als ein anderer besonderer Fall der allgemeinen Differenz $a-b$ angesehen werden muß.

2) So lange der Quotient $\frac{a}{b}$ allgemein ist, so lange ist er weder einer ganzen noch einer gebrochenen Zahl gleich und auch nicht der Eins; denn so wie eine dieser letztgenannten Erscheinungen einträte, so hätte man wieder einen besonderen Fall, während z. B. $\frac{3}{\sqrt{-5}}$ oder $\frac{3+2\sqrt{-5}}{4}$ u. dergl. andere besondere Fälle des allgemeinen Quotienten $\frac{a}{b}$ sein würden.

3) So lange die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ allgemein ist, so lange ist sie weder einer reellen noch einer imaginären Zahl gleich, weil, so wie einer der letzteren Fälle einträte, in der Quadratwurzel $\sqrt{a}$ nicht mehr der Radikand ganz unbestimmt (als ein bloßer Träger des Wurzelzeichens) gedacht worden sein würde.

§. 135.

Wenn wir im §. 15. und im §. 77. Gesetze hingestellt haben, nach denen mit den dortigen Wurzeln gerechnet werden kann,

so entsteht doch hier, wo die allgemeine Quadratwurzel als zweideutig erkannt worden ist, die Frage: wie modificiren sich jene Gesetze der Wurzeln, in dem gegenwärtigen Falle, d. h. wenn mit allgemeinen Quadratwurzeln gerechnet werden soll.

Für diese allgemeinen Quadratwurzeln finden sich aber sogleich folgende Rechnungsregeln, nämlich

47) $(\sqrt{a})^2 = a$; 48) $\sqrt{(a^2)} = \pm a$;

49) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; 50) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

51) $\sqrt{(a^n)} = \pm a^{\frac{n}{2}}$; 52) $\sqrt{(a^n)} = \pm(\sqrt{a})^n$,

wenn in 51.) $\frac{n}{2}$ in 52. aber n positiv oder negativ ganz oder 0 ist.

53) $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$;

54) $\frac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\left(\frac{b}{a^2}\right)}$ und 55) $\frac{a}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}}$,

wo a und b überall ganz allgemein gedacht sind, (als bloße Träger der Operationszeichen).

Die Gleichung 47.) ist nämlich die Definition der allgemeinen Quadratwurzel. — In der Gleichung 48.) stehen rechts die beiden durch die allgemeine Quadratwurzel zur Linken vorgestellten Werthe. Schriebe man also rechts entweder bloß $+a$, oder bloß $-a$, so hätte man nur einen dieser Werthe und der Ausdruck zur Rechten würde statt des andern zur Linken, nämlich statt $\sqrt{(a^2)}$, welcher als Quadratwurzel zweideutig ist, nicht überall gesetzt werden dürfen, weil er ihn nicht vollständig ersetzte *).

*) Man darf also in keiner allgemeinen Rechnung schreiben $\sqrt{36} = 6$, auch nicht $\sqrt{36} = -6$, sondern nur $\sqrt{36} = \pm 6$. — Eben so nur $\sqrt{1} = \pm 1$. Die Gleichungen $\sqrt{36} = 6$, oder $\sqrt{36} = -6$; oder $\sqrt{1} = 1$, oder $\sqrt{1} = -1$, u. dergl. sind also nie vollständige (vollkommene) Gleichungen, und nur mit Vorbehalt zuzulassen.

Die Gleichungen 49.) und 50.) enthalten zur Linken und zur Rechten gleich viele, nämlich zwei Werthe, und genau dieselben. Ist nämlich $\sqrt{a} = \pm\alpha$ und $\sqrt{b} = \pm\beta$, so hat zwar das Produkt $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ die vier Werthe $(+\alpha)\cdot(+\beta)$, $(+\alpha)\cdot(-\beta)$, $(-\alpha)\cdot(+\beta)$ und $(-\alpha)\cdot(-\beta)$, allein letztere sind paarweise einander gleich und ziehen sich auf die beiden $\pm\alpha\beta$ zurück, und gerade dieselben sind durch $\sqrt{ab}$ d. h. $\sqrt{\alpha^2\beta^2}$ ebenfalls vorgestellt. — Das Analoge gilt von der 50.; — und die übrigen Gleichungen werden jetzt keine Schwierigkeit mehr gewähren.

Anmerkg. Da die imaginäre Quadratwurzel nur ein besonderer Fall der allgemeinen Quadratwurzel ist, so versteht es sich von selbst, daß es nicht besondere Regeln für das Rechnen mit imaginären Wurzeln geben kann, und daß die im vorstehenden Paragraphen aufgestellten Formeln, für reelle Quadratwurzeln eben so sorgfältig in Anwendung gebracht werden müssen, wie für imaginäre, und wie für allgemeine, wenn man nicht zu irrigen Resultaten geführt werden will. Namentlich ist die Zweideutigkeit einer jeden Quadratwurzel eine schlimme Klippe für die Anfänger. Wer z. B. schriebe $\sqrt{16} = +4$, auch $\sqrt{16} = -4$, und nun aus diesen beiden (nur unter Vorbehalt geltenden) Gleichungen folgern wollte: „also ist auch $+4 = -4$" — der würde eben diese Zweideutigkeit der $\sqrt{16}$ nicht berücksichtigt haben, weil er sonst die allgemein wahre (vollständige, vollkommene) Gleichung $\sqrt{16} = \pm 4$ hingeschrieben hätte, und nicht die nur unter Vorbehalt wahren.

Aber eben so darf man, mag a positiv oder negativ oder allgemein gedacht werden, doch die Gleichungen

1) $p\cdot\sqrt{a} + q\cdot\sqrt{a} = (p+q)\cdot\sqrt{a}$ z. B. $5\cdot\sqrt{4} + 3\cdot\sqrt{4} = 8\cdot\sqrt{4}$,

2) $p\cdot\sqrt{a} - q\cdot\sqrt{a} = (p-q)\cdot\sqrt{a}$ z. B. $8\cdot\sqrt{4} - 3\cdot\sqrt{4} = 5\cdot\sqrt{4}$,

3) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$ z. B. $\sqrt{9}\cdot\sqrt{9} = (\sqrt{9})^2 = 9$

u. dergl. nur unter Vorbehalt zulassen, nämlich nur unter dem Vorbehalt, daß dasselbe Zeichen $\sqrt{a}$, so oft es in der Gleichung vorkommt, auch jedesmal einen und denselben

seiner beiden Werthe bezeichne, — eine Annahme, die bei allgemeinen Untersuchungen oft gar nicht gemacht werden kann. In allgemeinen Untersuchungen wird man also nicht übersehen dürfen, daß die Ausdrücke zur Linken in den Gleichungen 1.) und 2.) vierdeutig sind (weil zu jedem der beiden Werthe des einen Gliedes, jeder der beiden Werthe des andern hinzugefügt sein kann), daß aber die Ausdrücke zur Rechten von diesen vier Werthen nur zwei enthalten, daß also diese Gleichungen 1.) und 2.) selbst keine allgemein wahren (vollständigen, vollkommenen) Gleichungen sind, d. h. daß die Ausdrücke zur Rechten die zur Linken nicht vollständig ersetzen *). Eben so ist in der Gleichung 3.) der Ausdruck zur Linken zweideutig, während jeder der beiden folgenden nur eindeutig ist.

In allgemeinen Untersuchungen kann es also kommen, daß man einen Ausdruck wie $p \cdot \sqrt{a} \pm q \cdot \sqrt{a}$, muß stehen lassen und nicht dafür setzen kann $(p \pm q) \cdot \sqrt{a}$; eben so muß man zuweilen $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$ entweder stehen lassen, oder man darf doch nicht $(\sqrt{a})^2$ also auch nicht a dafür setzen; wohl aber ist allgemein wahr die Gleichung

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \pm a,$$

weil (nach N. 49.)

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{(aa)} = \sqrt{(a^2)}$$

und (nach N. 48.) wiederum

$$\sqrt{(a^2)} = \pm a$$

allgemein richtige Gleichungen sind.

---

*) Es ist nämlich

$$5 \cdot \sqrt{4} = \pm 10,$$

und $$3 \cdot \sqrt{4} = \pm 6$$

also $$5 \cdot \sqrt{4} + 3\sqrt{4} = \pm 10 \pm 6$$

d. h. die Summe zur Linken hat die 4 Werthe ± 16 und ± 4, während der oben in 1.) zur Rechten stehende Ausdruck $8 \cdot \sqrt{4}$ nur die zwei Werthe ± 16 hat.

Also z. B. darf man nur mit Vorbehalt annehmen, daß

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

sei. — Dagegen ist allgemein wahr die Gleichung

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = \pm 1 \quad \text{(nach N. 49.)}.$$

Eben so darf man nur mit Vorbehalt annehmen, daß

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = -6$$

sei, obgleich man (nach N. 53.) ganz allgemein hat

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = 2\cdot\sqrt{-1}$$

und

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9(-1)} = 3\cdot\sqrt{-1},$$

in so ferne hier links und rechts zwei Werthe und dieselben Werthe sind. Es ist auch noch richtig, wenn hieraus gefolgert wird

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = 6\cdot\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1};$$

dagegen hört die allgemeine Gültigkeit der Resultate auf, wenn man jetzt zur Rechten statt $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ setzen wollte $(\sqrt{-1})^2$ also -1, weil dies zwei gleiche Faktoren voraussetzen würde, während in dem Produkt $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$ jeder der beiden Faktoren einen anderen seiner Werthe (eine andere ihrer F o r m e n) vorstellen kann und häufig auch wird. Dagegen könnte man (nach N. 49.) weiter schließen

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = \pm 1,$$

so daß die vorletzte Gleichung übergeht in

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = 6\cdot(\pm 1) = \pm 6,$$

welche letztere Gleichung wiederum allgemein wahr ist, welche man aber auch erhalten hätte, wenn man direkt (nach N. 49.) genommen hätte

$$\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9} = \sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = \pm 6.$$

§. 136.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes der Quadratwurzel (des Zeichens $\sqrt{a}$) hat aber die reine quadratische Gleichung

$$x^2 = a \quad \text{oder} \quad x^2 - a = 0$$

im allgemeinen jedesmal zwei Auflösungen, nämlich

$$x = +\sqrt{a} \quad \text{und} \quad x = -\sqrt{a},$$

wo $\sqrt{a}$ in beiden letztern Gleichungen einen und denselben ihrer beiden Werthe repräsentirt, gleichgültig welchen.

Jeder dieser beiden Werthe von x hat also die Eigenschaft, daß er, statt x gesetzt, die gegebene Gleichung $x^2 = a$ zu einer identischen (richtigen) macht, ohne daß beide deshalb nothwendig einander gleich sind.

§. 137.

Die quadratische Gleichung

$$1) \qquad x^2 + ax + b = 0$$

nach ihrem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung. Man suche sie in eine reine quadratische Gleichung zu verwandeln. Statt des Unbekannten x setze man daher lieber $z+h$, so daß die gegebene Gleichung 1.)

in $$(z+h)^2 + a(z+h) + b = 0$$

d. h. in $$2) \qquad z^2 + (2h+a)z + (b+ah+h^2) = 0,$$

folglich in die reine quadratische

$$3) \qquad z^2 = -b - ah - h^2$$

übergeht, so bald man h so nimmt, daß

$$4) \qquad 2h + a = 0 \quad \text{oder} \quad h = -\tfrac{1}{2}a$$

wird, wodurch die 3.) in

$$5) \qquad z^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - b$$

übergeht, und (nach §. 136.)

$$6) \quad z = +\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b} \qquad \text{oder} \qquad 7) \quad z = -\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - b}$$

also, weil $x = z + h = z - \frac{1}{2}a$ ist,

8) $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ oder 9) $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$

gibt, wo die Wurzel $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b}$ jedesmal einen und denselben ihrer beiden Werthe vorstellt.

Diese Werthe von x schreiben sich aber auch noch so (nach §. 135. N. 54.)

$$10) \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

immer unter der Voraussetzung, daß die vorkommende Wurzel $\sqrt{a^2 - 4b}$ jedesmal einen und denselben, übrigens beliebigen ihrer Werthe repräsentirt.

Anmerkung. Da $(x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$, folglich $(x + \frac{1}{2}a)^2 = x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2$ ist, so kann man die vorstehende Gleichung

$$1) \quad x^2 + ax + b = 0$$

auch dadurch lösen, daß man zuerst daraus macht

$$2) \quad x^2 + ax = -b,$$

dann von dem Koeffizienten a von x^1 die Hälfte nimmt, quadrirt und addirt, so daß man hat

$$3) \quad x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b$$

oder

$$4) \quad (x + \frac{1}{2}a)^2 = \frac{1}{4}a^2 - b$$

zuletzt aber diese reine quadratische Gleichung (in welcher die Summe $x + \frac{1}{2}a$ als der Unbekannte erscheint) vollends auflöst.

§. 138.

Soll also die allgemeine quadratische Gleichung

$$1) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

aufgelöst werden, so verwandle man sie zuerst in

$$2) \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

und verfahre dann (nach §. 137. oder) nach der Anmerkung zu §. 137. und man erhält nach und nach

$$3) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a},$$

$$4) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

dann die reine quadratische Gleichung

$$5) \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

und hieraus

$$6) \qquad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

und

$$7) \qquad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Dabei hat jede quadratische Gleichung jedesmal zwei Auflösungen, den einzigen Fall ausgenommen, wo $b^2-4ac=0$ ist, und wo die beiden Auflösungen in eine einzige zusammen fallen.

Und für den besondern Fall, daß a, b, c gegebene reelle Ausdrücke sind, müssen diese beiden Werthe von x entweder alle beide reell sein, wenn nämlich b^2-4ac positiv ist, oder sie sind alle beide zugleich imaginär, so oft nämlich b^2-4ac negativ ist. Und sind, in derselben speciellen Voraussetzung, beide Werthe von x einander gleich, d. h. $b^2-4ac=0$, so ist dieser Werth x allemal reell.

So lange aber a, b, c noch nicht reell, sondern noch allgemein gedacht sind, so lange kann von diesen speciellen Erscheinungen gar nicht die Rede sein.

§. 139.

Sind aber a, b, c reell, und ist dabei

$$b^2-4ac \quad \text{negativ z. B.} \quad = -q^2,$$

unter q die absolute (positive) $\sqrt{4ac-b^2}$ verstanden, so sind die beiden Werthe von x aus

$$ax^2+bx+c=0,$$

jetzt $$x=\frac{-b\pm\sqrt{-q^2}}{2a}=\frac{-b}{2a}\pm\frac{q}{2a}\sqrt{-1}.$$

So oft alſo die beiden Auflöſungen der quadratiſchen Gleichung

$$ax^2+bx+c=0,$$

deren Koeffizienten alle reell ſind, imaginär werden, ſo läßt ſich die eine davon allemal auf die Form

$$P+Q\sqrt{-1}$$

bringen, während die andere dann nothwendig

$$P-Q\sqrt{-1}$$

iſt; in beiden Ausdrücken unter P und Q dieſelben reellen (poſitiven oder negativen oder auch Null-) Werthe verſtanden. — Dieſe beiden imaginären Auflöſungen einer ſolchen quadratiſchen Gleichung können daher nie einander gleich ſein.

Dieſe Bemerkung wird in der Folge von ungemeiner Wichtigkeit.

Uebungs-Beiſpiele.

1) Aus $x^2=8x-15$ folgt $x=5$ und $x=3$.

2) Aus $x^2-2x=15$ folgt $x=5$ und $x=-3$.

3) Aus $x^2+2x=15$ folgt $x=-5$ und $x=3$.

4) Aus $x^2+8x+15=0$ folgt $x=-5$ und $x=-3$.

5) Aus $3x^2-11x=-6$ folgt $x=3$ und $x=\frac{2}{3}$.

6) Aus $3x^2+7x=6$ folgt $x=-3$ und $x=\frac{2}{3}$.

7) Aus $3x^2-7x=6$ folgt $x=3$ und $x=-\frac{2}{3}$.

8) Aus $3x^2+11x+6=0$ folgt $x=-3$ und $x=-\frac{2}{3}$.

9) Aus $12x^2=47x-40$ folgt $x=1\frac{1}{4}$ und $x=2\frac{2}{3}$.

10) Aus $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0$ folgt $x=6\frac{3}{7}$ und $x=3\frac{1}{4}$.

11) Aus $x^2-8x=14$ folgt $x=4+\sqrt{30}$ und $x=4-\sqrt{30}$
d. h. $x=9{,}4772\ldots$ und $x=-1{,}4772\ldots$

12) Aus $118x-2\frac{1}{2}x^2 = 20$ folgt $x = \frac{118 \pm \sqrt{13724}}{5}$

d. h. $x = 47{,}0298\ldots$ und $x = 0{,}1701\ldots$

13) Aus $6x-30 = 3x^2$ folgt $x = 1+\sqrt{-9}$ und $x = 1-\sqrt{-9}$

oder $x = 1+3\sqrt{-1}$ und $x = 1-3\sqrt{-1}$.

14) Aus $\frac{31}{6x} = \frac{16}{117-2x}+1$ folgt $x = 67\frac{1}{6}$ und $x = 4\frac{1}{2}$.

15) Aus $\frac{25x+180}{10x-81} = \frac{40x}{5x-8}-\frac{3}{5}$ folgt $x = 14\frac{3}{5}$ und $x = \frac{72}{245}$.

16) Aus $7x-8x^2 = 34$

folgt $x = \frac{7+\sqrt{-1039}}{16}$ und $x = \frac{7-\sqrt{-1039}}{16}$.

d. h. $x = \frac{7}{16} \pm (2{,}014\ldots)\cdot\sqrt{-1}$.

17) Aus $\frac{18+x}{6(3-x)} = \frac{20x+9}{19-7x} - \frac{65}{4(3-x)}$

folgt $x = 7\frac{22}{113}$ und $x = 2\frac{1}{2}$.

18) Aus $adx-acx^2 = bcx-bd$ folgt $x = \frac{d}{c}$ und $x = -\frac{b}{a}$.

19) Aus $\frac{a^2x^2}{f^2} - \frac{2ax}{g} + \frac{f^2}{g^2} = 0$ folgt $x = \frac{f^2}{ag}$.

20) Aus $abx^2-2x(a+b)\sqrt{ab} = (a-b)^2$

folgt $x = \frac{a+b \pm \sqrt{2a^2+2b^2}}{\sqrt{ab}}$.

21) Aus $ab^3x^2+(1+c)bd\sqrt{c}+cb^2x^2 = [b^3d\sqrt{c}+(ab+c)(1+c)]x$

folgt $x = \frac{bd\sqrt{c}}{ab+c}$ und $x = \frac{1+c}{b^2}$.

22) Aus $a^2x^2+b^2 = 2abx+cx$ folgt $x = \frac{2ab+c \pm \sqrt{4abc+c^2}}{2a^2}$.

23) Aus $\frac{ax}{b-c} = \frac{a^2}{(b-c)x} - \frac{b-c}{x} + 2\sqrt{a}$

folgt $x = \frac{b-c+a}{\sqrt{a}}$ und $x = \frac{b-c-a}{\sqrt{a}}$.

24) Aus $ax^{2n}+bx^n = c$ d. h. $a(x^n)^2+b \cdot x^n = c$

folgt $x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4ac}}{2a}$ *).

25) Aus $x^3 - \frac{p^3}{27x^3} + q = 0$

folgt $x^3 = -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$ und $x^3 = -\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$.

26) Aus $x^4-74x^2+1225=0$ d. h. aus $(x^2)^2-74 \cdot x^2+1225=0$

folgt $x^2 = 25$ und $x^2 = 49$,

also $x = \pm 5$ und $x = \pm 7$.

27) Aus $3x^6+42x^3=3321$ d. h. aus $3(x^3)^2+42 \cdot x^3 = 3321$

folgt $x^3 = 27$ und $x^3 = -41$.

28) Aus $2x^8 = 7-4x^4$ d. h. aus $2(x^4)^2+4 \cdot x^4 = 7$

folgt $x^4 = -1 + \frac{3}{\sqrt{2}}$ und $x^4 = -1 - \frac{3}{\sqrt{2}}$.

§. 140. Aufgabe.

Aus den beiden Gleichungen bezüglich der ersten und der zweiten Ordnung:

1) $\alpha y + \beta x + \gamma = 0$

und 2) $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$,

die Werthe der beiden Unbekannten x und y zu finden.

Auflösung und Beweis. Man finde aus 1.) y in x ausgedrückt, nämlich

3) $y = -\frac{\beta x + \gamma}{\alpha}$.

---

*) In dieser und in den folgenden Aufgaben ist nicht x der Unbekannte, denn nach x sind diese Gleichungen alle nicht quadratisch; sondern der Unbekannte ist bald x^n, bald x^3, bald x^2, bald x^4, u. s. f.; und diese Gleichungen sind in der That nach diesen letztern Unbekannten x^n, x^3, x^2, x^4, die man jedesmal auch durch einen einzigen Buchstaben z. B. durch z vorstellen könnte, quadratisch und hier nach diesen Unbekannten, aber nicht nach x selbst, aufgelöst.

Dieser Ausdruck statt y gesetzt, macht die erste Gleichung identisch und die 2te übergehen in

$$4)\quad \frac{a(\beta x+\gamma)^2}{\alpha^2} - bx\cdot\frac{\beta x+\gamma}{\alpha} + cx^2 - d\cdot\frac{\beta x+\gamma}{\alpha} + ex + f = 0,$$

welche daher noch durch dazugehörige Werthe von x identisch werden muß.

Diese Gleichung 4.) löse man also nach x auf.

Sie giebt, — wenn man mit α^2 wegmultiplicirt und $(\beta x+\gamma)^2 = \beta^2x^2+2\beta\gamma x+\gamma^2$ zu Hülfe nimmt — geordnet, folgende:

$$5)\quad (a\beta^2-b\alpha\beta+c\alpha^2)\cdot x^2+[2a\beta\gamma-b\alpha\gamma-d\alpha\beta+e\alpha^2]\cdot x$$
$$+(a\gamma^2-d\alpha\gamma+f\alpha^2)=0,$$

welche quadratisch ist, (nach §. 138.) vollends aufgelöst werden kann, und für den Unbekannten x zwei Werthe liefert.

Jeden dieser beiden Werthe setze man statt x in 3.), so erhält man den zugehörigen Werth von y, also zwei Paare zusammengehöriger Werthe von x und y, welche die beiden gegebenen Gleichungen 1. und 2.) identisch machen.

Anmerkg. Man konnte, wie bei den einfachen Gleichungen, jeden für x (aus 5.) gefundenen Werth statt x in irgend eine der Gleichungen setzen, also auch in die 2.); und diese Gleichung nachgehends nach y auflösen. Allein dann hätte man zu jedem Werth von x, zwei Werthe von y gefunden, weil die Gleichung 2.) nach y quadratisch ist; und nur einer davon wäre der wahre gewesen, nämlich derjenige, welcher statt y gesetzt, für denselben Werth von x, auch die erste Gleichung identisch gemacht hätte, weil es gerade die einzige Bedingung der Aufgabe ist, daß nicht eine sondern beide Gleichungen 1.) u. 2.) identisch werden sollen. Und da hat man also besser gethan, den (aus 5.) gefundenen Werth von x, statt x in die 3.) oder in die 1.) zu setzen, weil man dann sogleich nur einen einzigen, und den wahren Werth von y, dazu erhielt.

§. 141.

Dabei fällt in die Augen, daß die Gleichung 1.) nur durch den einzigen Ausdruck $-\frac{\beta x+\gamma}{\alpha}$ statt y gesetzt, und die Gleichung 5.) nur durch 2 Werthe von x identisch wird, daß es also nicht mehr als die eben gefundenen zwei Paare von Werthen von x und y geben kann, welche beide Gleichungen 1.) und 2.) zugleich identisch machen.

§. 142.

Auch in dieser Aufgabe spielte das Eliminiren des Unbekannten y, d. h. das Auffinden der Eliminationsgleichung 4.) die wichtigste Rolle. Man hat sich hier der früher beschriebenen Substitutions-Methode bedient. Hätte man die Kombinations-Methode anwenden wollen, so hätte man beide Gleichnngen nach y aufgelöst, und erhalten

aus 1.) ... $y = -\frac{\beta x+\gamma}{\alpha}$

und aus 2.) ...

$$y = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a};$$

und diese beiden Werthe von y einander gleich gesetzt, geben

$$-\frac{\beta x+\gamma}{\alpha} = \frac{-(bx+d) \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}}{2a},$$

welches die gesuchte Eliminationsgleichung ist, und welche nun noch geordnet werden muß.

Multiplicirt man aber mit $2a\alpha$ weg, und schafft man die Quadratwurzel ganz allein auf die eine Seite, so erhält man

$$(\alpha b-2a\beta)x+(\alpha d-2a\gamma)$$
$$= \pm\alpha\sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af)}.$$

Und quadrirt man hier auf beiden Seiten, damit die Wurzel weggeschafft werde, so erhält man

$$(\alpha b-2a\beta)^2 \cdot x^2+2(\alpha b-2a\beta)(\alpha d-2a\gamma)x+(\alpha d-2a\gamma)^2$$
$$=\alpha^2(b^2-4ac)x^2+2\alpha^2(bd-2ae)x+\alpha^2(d^2-4af) \text{ *)};$$

und diese Gleichung, wenn man sie ferner nach x ordnet, und zuletzt noch durch $4a$ wegdividirt, ist keine andere als die Gleichung 5. des §. 140.

§. 143.

Wollte man sich, um y zu eliminiren, der englischen Methode bedienen, so mußte sie einige Abänderungen erleiden, wie in folgendem zu sehen.

Sind nämlich

$$1)\quad \alpha y+\beta x+\gamma=0,$$

und

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

oder

$$2)\quad ay^2+(bx+d)y+(cx^2+ex+f)=0$$

die beiden Gleichungen, aus denen y eliminirt werden soll, so muß man damit beginnen, daß man zuerst y^2 eliminirt. Zu dem Behufe multiplicire man die 1.) mit ay, die 2.) aber mit α; und subtrahire beide Resultate von einander; und man erhält

$$3)\quad (b\alpha-a\beta)xy+\alpha cx^2+(d\alpha-a\gamma)y+e\alpha x+f\alpha=0;$$

oder, wenn man diese Gleichung nach y ordnet:

$$4)\quad [(b\alpha-a\beta)x+(d\alpha-a\gamma)]\cdot y+(c\alpha x^2+e\alpha x+f\alpha)=0.$$

---

*) Der Anfänger mag beobachten, daß weil

$$(a+\sqrt{b})^2=a^2+2a\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$$
$$=a^2+2a\sqrt{b}+b$$
$$=a^2+b+2a\sqrt{b}$$

ist, — aus der Gleichung $cx=b+\sqrt{x}$ das Wurzelzeichen nicht dadurch wegfällt, daß man auf beiden Seiten die Quadrate nimmt, sondern nur dann erst wegfällt, wenn man die gegebene Gleichung so schreibt:

$$cx-b=\sqrt{x}$$

so nämlich, daß die Wurzel $(\sqrt{x})$ ganz allein auf die eine Seite zu stehen kommt, — und dann erst auf beiden Seiten quadrirt.

Nun sind 1.) und 4.) Gleichungen, die beide nach y zu den einfachen gehören, und aus denen dieses y noch eliminirt wird, wenn man die 1.) mit $(b\alpha - a\beta)x + (d\alpha - a\gamma)$, die 4.) dagegen mit α multiplicirt, und diese neuen Gleichungen von einander subtrahirt. Dadurch erhält man aber wieder die Eliminationsgleichung 5. des §. 140.

§. 144.

Auch die französische Eliminations-Methode kann mit einiger Abänderung hier angewandt werden, nämlich da, wo aus den Gleichungen

$$1)\quad \alpha y + \beta x + \gamma = 0$$

$$2)\quad ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$$

der Unbekannte y eliminirt werden soll.

Zu dem Ende multiplicire man die Gleichung 1.) mit $\mu y + \nu x + \varrho$, und addire das Resultat zu der Gleichung 2.); und man hat

$$3)\quad (a + \mu\alpha)\cdot y^2 + (b + \mu\beta + \nu\alpha)\cdot xy + (c + \nu\beta)\cdot x^2 + (d + \mu\gamma + \varrho\alpha)\cdot y$$
$$+ (e + \nu\gamma + \varrho\beta)\cdot x + (f + \varrho\gamma) = 0.$$

In dieser Gleichung denkt man sich nun μ, ν, ϱ so bestimmt, daß die Koeffizienten von y^2, von xy, und von y, Null werden. Dann erhält man als Eliminationsgleichung

$$4)\quad (c + \nu\beta)x^2 + (e + \nu\gamma + \varrho\beta)x + (f + \varrho\gamma) = 0,$$

unter der Voraussetzung, daß μ, ν und ϱ aus den 3 Gleichungen

$$5)\quad a + \alpha\mu = 0$$

$$6)\quad b + \beta\mu + \alpha\nu = 0$$

$$7)\quad d + \gamma\mu + \alpha\varrho = 0$$

gefunden werden, welche

$$\mu = -\frac{a}{\alpha}, \qquad \nu = \frac{\beta a - \alpha b}{\alpha^2}$$

und $\qquad \varrho = \dfrac{a\gamma - d\alpha}{\alpha^2} \qquad$ liefern.

Setzt man aber diese Werthe statt μ, ν, ϱ, in die Gleichung 4.), so erhält man bald die Eliminationsgleichung 5.) des §. 140.

Anmerkung. Man könnte auch die 1.), statt sie mit $\mu y + \nu x + \varrho$ zu multipliciren, bloß mit $\mu y + \pi$ multipliciren, zu 2.) addiren, aber in der neuen Gleichung, die mit y (in der ersten Potenz) affizirten Glieder in ein einziges zusammenfassen, und dann bloß die Koeffizienten von y^2 und von y der Null gleich setzen, d. h. μ und π sich so bestimmt denken, oder so bestimmen, daß diese beiden Koeffizienten Null werden. Man hätte aber dann doch π von der Form $\nu x + \varrho$ gefunden, so daß das Ganze, vom eben durchgeführten wesentlich nicht sehr bedeutend verschieden gewesen wäre.

Hierhergehörige Beispiele.

1) Zwei Zahlen x und y so zu finden, daß ihre Summe $=s$, und ihr Produkt $=p$ wird, d. h. $x+y=s$ und $xy=p$

oder 1) $1\cdot x+1\cdot y-s=0$

und 2) $0\cdot y^2+1\cdot xy+0\cdot x^2+0\cdot y+0\cdot x-p=0$

nach x und y aufzulösen. — Man findet $x=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$ und $y=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{s^2-4p}$, wo $\sqrt{s^2-4p}$ jeden ihrer beiden Werthe, aber jedesmal einen und denselben Werth vorstellt.

2) Zwei Zahlen x und y zu finden, deren Differenz $=\delta$, und Summe der Quadrate $=s$ ist; d. h. $x-y=\delta$ und $x^2+y^2=s$;

oder 1) $-1\cdot y+1\cdot x-\delta=0$

2) $1\cdot y^2+0\cdot xy+1\cdot x^2+0\cdot y+0\cdot x-s=0$,

nach x und nach y aufzulösen. — Man findet

$$x=\tfrac{1}{2}\delta+\sqrt{2s-\delta^2}$$

$$y=-\tfrac{1}{2}\delta+\sqrt{2s-\delta^2},$$

wo $\sqrt{2s-\delta^2}$ jeden ihrer beiden Werthe, aber immer, so oft sie vorkommt, einen und denselben Werth vorstellt.

3) Die Gleichungen

$$4x-3y=7 \quad \text{und} \quad x^2-y^2=10$$

nach x und nach y aufzulösen. — Man erhält $x = 4+\sqrt{(-\frac{27}{7})}$ und $y = 3+\frac{4}{3}\sqrt{(-\frac{27}{7})}$, wo die $\sqrt{(-\frac{27}{7})}$ jeden ihrer beiden Werthe, aber jedesmal einen und denselben Werth vorstellt, so daß die Formen $x = 4-\sqrt{(-\frac{27}{7})}$ und $y = 3-\frac{4}{3}\sqrt{(-\frac{27}{7})}$ den beiden gegebenen Gleichungen ebenfalls genügen.

4) Die Gleichungen

$$3x+2y = 9 \quad \text{und} \quad 3y^2 = 4x+5$$

nach x und nach y aufzulösen. — Man findet

$$x = \frac{89\mp 2\sqrt{475}}{27} \quad \text{und} \quad y = \frac{-4\pm\sqrt{475}}{9}.$$

5) Die Gleichung $\frac{x}{y} = q$ und $\alpha x^2+\beta y^2 = \gamma$, nach x und nach y aufzulösen.

Man findet

$$y = \pm\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}} \quad \text{und} \quad x = \pm q\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}},$$

wo die vorkommende $\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha q^2+\beta}}$ jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

§. 145. Aufgabe.

Es sind gegeben n Gleichungen zwischen n Unbekannten x_1, x_2, $x_3 \cdots x_n$; darunter die letzte von der zweiten Ordnung, die übrigen zur ersten Ordnung gehörig. Man soll die n Unbekannten finden.

Auflösung 1. Man finde x_1 aus der ersten Gleichung, und setze den Werth dafür in die übrigen n—1 Gleichungen statt x_1. Aus der ersten dieser neuen n—1 Gleichungen finde man x_2 und setze den Werth dafür in die übrigen n—2 Gleichungen. Aus der ersten dieser neuen n—2 Gleichungen finde man x_3 und setze den Werth dafür in die übrigen n—3 Gleichungen. — So fahre man fort, bis man zuletzt noch zwei Gleichungen hat, zwischen den beiden Unbekannten x_{n-1} und x_n, von denen die letztere noch immer zur zweiten Ordnung gehört, während die erstere noch immer eine einfache Gleichung ist. Findet man hier nun noch aus der erstern x_{n-1}, und setzt den Werth dafür in die letztere, so erhält man eine Gleichung, die bloß noch den Unbekannten x_n enthält und nach selbigem quadratisch ist. Diese

gibt für x_n zwei Werthe, und jeder dieser beiden Werthe liefert, wenn man zu den Ausdrücken für

$$x_{n-1},\ x_{n-2},\ \cdots\ x_3,\ x_2,\ x_1$$

zurückkehrt (welche in Verbindung mit den zuletzt für x_n gefundenen wirklich alle gegebenen Gleichungen identisch machen) einen Werth für jeden der übrigen Unbekannten dazu.

Anmerkung. Man könnte auch aus den ersten n—1 einfachen Gleichungen, die n—1 Unbekannten $x_1, x_2, \cdots x_{n-1}$ alle in den letztern x_n ausgedrückt finden, und dann diese Werthe alle auf einmal statt dieser Unbekannten in die letzte der gegebenen Gleichungen substituiren, und man erhielte dann die nach x_n quadratische Endgleichung ohne weiteres.

Ueberhaupt kann man in einzelnen Fällen das Verfahren bedeutend abändern, wenn man nur zuletzt seinen Zweck erreicht und namentlich sich überzeugen kann, daß wirklich alle gegebenen Gleichungen identisch sind.

Hierhergehörige Uebungsbeispiele.

1) Aus $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=8 \\ x^2+y^2+z^2=36 \\ 2x-3y-z=1 \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} x=4\pm\sqrt{\frac{23}{19}} \\ y=\frac{3}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{23}{19}} \\ z=\frac{5}{2}\mp\frac{5}{2}\sqrt{\frac{23}{19}} \end{array}\right\}$.

2) Aus $\left\{\begin{array}{l} xy+xz+yz=27 \\ x-y=6 \\ y-z=3 \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{lll} x=9 & \text{oder} & 1 \\ y=3 & \text{oder} & -5 \\ z=0 & \text{oder} & -8 \end{array}\right\}$.

3) Aus $\left\{\begin{array}{l} x+y+z+v=2a \\ x-y-z+v=2b \\ x-y+z-v=2c \\ x^2+yz+v^2=d \end{array}\right\}$ folgt

$$x=\frac{-a-b+2c}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$y=\frac{-a-3b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$z=\frac{3a+b}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}$$

$$v=\frac{3a+3b-2c}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{(-a-b+2c)^2+4[d-(a+b)^2+(a+c)(b+c)]}.$$

Zweite Abtheilung.

Von den Ausdrücken von der Form ax^2+bx+c d. h. von den Eigenschaften der ganzen Funktionen von x vom zweiten Grade noch in's Besondere.

§. 146. Lehrsatz.

Ist α ein Werth von z, welcher z^2+Az+B zu Null macht, so läßt sich z^2+Az+B allemal in zwei Faktoren zerlegen, von denen der eine $z-\alpha$, der andere dagegen die Form $z-\beta$ hat.

Beweis. Denn da nach der Voraussetzung $\alpha^2+A\alpha+B=0$ ist, so ist, wenn man dies von z^2+Az+B subtrahirt:

$$z^2+Az+B=(z^2-\alpha^2)+A\cdot(z-\alpha),$$

also auch $$=(z-\alpha)(z+\alpha+A)=(z-\alpha)(z-\beta),$$

wenn $-(\alpha+A)$ durch β vorgestellt wird.

§. 147. Aufgabe.

Den Ausdruck z^2+Az+B in zwei Faktoren von der Form $z-\alpha$ und $z-\beta$, wo α und β von z unabhängig sein sollen, zu zerlegen.

Auflösung I. Es ist

$$(z-\alpha)(z-\beta)=z^2-(\alpha+\beta)z+\alpha\beta;$$

und weil dieser Ausdruck für jeden Werth von z mit dem gegebenen z^2+Az+B identisch werden soll, so muß identisch sein (nach §. 121.)

$$1)\quad \alpha+\beta=-A$$

und $$2)\quad \alpha\cdot\beta=\ B,$$

welche beiden Gleichungen, nach α und β, aufgelöst:

$$3)\quad \alpha=-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}$$

und $$4)\quad \beta=-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B}$$

geben, so daß man hat

$$z^2+Az+B=[z-(-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B})]\cdot[z-(-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B})]$$
$$=[z+(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B})]\cdot[z+(\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2-4B})].$$

Und weil man für α und β zwei Paare zusammengehöriger Werthe hat, welche den Gleichungen 1.) und 2.) genügen, so scheint es, als wenn der Aufgabe auf zwei verschiedene Arten genügt werden könnte. Allein die beiden Werthe von α und β geben, wie die bloße Ansicht lehrt, doch immer dieselben Faktoren, nur mit einander vertauscht.

Es läßt sich also der Ausdruck z^2+Az+B nur auf eine einzige Art in 2 Faktoren von der Form $z-\alpha$ und $z-\beta$ zerlegen.

Und diese beiden Faktoren heißen reell und sind einander nicht gleich, wenn $A^2>4B$; sie heißen reell und sind einander gleich, wenn $A^2=4B$; endlich heißen sie imaginär, wenn $A^2<4B$ und wenn in allen 3 Fällen A und B reelle Zahlen sind.

Auflösung II. Weil der Ausdruck z^2+Az+B die Form $(z-\alpha)(z-\beta)$ annehmen soll, so sind α und β die beiden Werthe von z, welche ihn zu Null machen. Um also α und β zu haben, suche man nur die beiden Werthe von z, welche die Gleichung

$$z^2+Az+B=0$$

identisch machen.

§. 148.

Zu gleicher Zeit erhellet, daß wenn α und β die beiden Werthe von z sind, welche $z^2+Az+B=0$ identisch machen, dann allemal $(z-\alpha)(z-\beta)=z^2+Az+B$, also auch

$$A=-(\alpha+\beta)$$

und
$$B=+\alpha\cdot\beta$$

sein werde; d. h. denkt man sich z^2+Az+B in ihre zwei einfachen Faktoren $(z-\alpha)(z-\beta)$ zerlegt, so sind

1) α und β die beiden Werthe von z, welche z^2+Az+B der Null gleichmachen, und

2) der erste Koeffizient A ist allemal die Summe $\alpha+\beta$ dieser beiden Werthe, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen während der zweite Koeffizient B allemal das Produkt derselben beiden Werthe ist.

§. 149.

Weil $px^2+qx+r=p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right)$ geschrieben werden kann, so ist auch, — in so ferne $x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}$ in zwei Faktoren von der Form $(x+\alpha)(x+\beta)$ zerlegt wird:

$$1)\quad px^2+qx+r=p\left(x+\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)\left(x+\frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right),$$

wo p selber noch in $\sqrt{p}\cdot\sqrt{p}$ oder in $\mu\cdot\frac{p}{\mu}$ zerlegt, und jeder dieser Faktoren den übrigen zugelegt werden kann, so daß man erhält:

$$2)\quad px^2+qx+r$$

$$=\left(\mu x+\mu\cdot\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right)\left(\frac{p}{\mu}x+\frac{p}{\mu}\cdot\frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2p}\right),$$

auch

$$=\left(\sqrt{p}\cdot x+\frac{q+\sqrt{q^2-4pr}}{2\sqrt{p}}\right)\cdot\left(\sqrt{p}\cdot x+\frac{q-\sqrt{q^2-4pr}}{2\sqrt{p}}\right),$$

wo jede Wurzel, so oft sie vorkommt, einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

Anmerkung. Man konnte auch direkt verlangen, px^2+qx+r in ein Produkt von der Form $(\mu x+\alpha)(\nu x+\beta)$ zu verwandeln. — Weil aber

$$(\mu x+\alpha)(\nu x+\beta)=\mu\nu x^2+(\mu\beta+\nu\alpha)x+\alpha\beta$$

mit px^2+qx+r für jeden Werth von x identisch werden soll so muß man identisch machen (nach §. 121.)

1) $\mu\nu \quad = p$,

2) $\mu\beta+\nu\alpha = q$,

3) $\alpha\beta \quad = r$,

woraus, je nachdem man noch die 4te Bedingung hinzufügt, daß $\mu = \nu$ werden soll, oder diese 4te Bedingung wegläßt, so daß μ ganz unbestimmt und willkürlich bleibt, die beiden obigen Zerlegungen sich ergeben.

§. 150. Aufgabe.

Man soll einen Ausdruck von der Form $x + \alpha$ finden, welcher mit der Quadratwurzel

$$\sqrt{x^2 + Ax + B}$$

identisch ist.

Auflösung. Weil

$$1)\quad \sqrt{x^2 + Ax + B} = x + \alpha$$

werden soll, so muß

$$2)\quad x^2 + Ax + B = (x + \alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$$

werden; also (nach §. 121.)

$$3)\quad 2\alpha = A \quad \text{und} \quad 4)\quad \alpha^2 = B,$$

welche beide letztern Gleichungen identisch sein müssen. Die 3.) wird durch

$$5)\quad \alpha = \tfrac{1}{2}A$$

identisch; und setzt man diesen Werth in die 4.) statt α, so bekommt man

$$6)\quad \tfrac{1}{4}A^2 = B \quad \text{oder} \quad A^2 - 4B = 0,$$

welche identisch sein muß. — Sind also A und B so gegeben, daß die Gleichung 6.) identisch ist, so ist die Aufgabe möglich, und es ist $\sqrt{x^2 + Ax + B} = \pm(x + \tfrac{1}{2}A)$.

Die gegebene Wurzel heißt dann „nach x rational."

Ist aber nicht $A^2 - 4B = 0$ gegeben, so existirt kein Ausdruck von der Form $x + \alpha$, welcher die Eigenschaft der Quadratwurzel $\sqrt{x^2 + Ax + B}$ hat, während x unbestimmt bleibt.

Die gegebene Wurzel heißt dann „nach x irrational."

§. 151.

Weil man schreiben kann

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right),$$

so ist:

$$\sqrt{px^2+qx+r} = \sqrt{p}\left(x+\tfrac{1}{2}\frac{q}{p}\right) = \sqrt{p}\cdot x+\frac{q}{2\sqrt{p}},$$

so oft $\left(\frac{q}{p}\right)^2-4\frac{r}{p}=0$, d. h. $q^2-4pr=0$ ist. — Ist also q^2-4pr nicht $=0$, so existirt kein Ausdruck von der Form $\beta x+\alpha$, welcher für jeden Werth von x, der Quadratwurzel $\sqrt{px^2+qx+r}$ gleich sein könnte.

Im erstern Fall ist also die Wurzel $\sqrt{px^2+qx+r}$ (nach x) rational, im andern irrational.

§. 152. Aufgabe.

In dem Falle aber, wo kein Ausdruck von der Form $x+\alpha$ so existirt, daß $(x+\alpha)^2 = x^2+Ax+B$ werden könnte, kann man doch einen Ausdruck von der Form

$$(x+\alpha)^2+\beta$$

suchen, welcher mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^2+Ax+B$$

identisch wird, für jeden Werth von x.

Auflösung. Da jetzt:

$$1)\quad x^2+2\alpha x+(\alpha^2+\beta) = x^2+Ax+B$$

werden soll, so muß man jetzt (nach §. 121.)

$$2)\quad 2\alpha = A \quad \text{und} \quad 3)\quad \alpha^2+\beta = B,$$

also $\quad 4)\quad \alpha = \frac{1}{2}A \quad$ und $\quad 5)\quad \beta = B-\frac{1}{4}A^2$

machen; so daß man hat:

$$x^2+Ax+B = (x+\tfrac{1}{2}A)^2+(B-\tfrac{1}{4}A^2).$$

§. 153.

Weil

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right)$$

ist, so findet man gerade so:

$$px^2+qx+r = p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2+\frac{4pr-q^2}{4p}.$$

Anmerkg. Und weil $x+\frac{q}{2p}=z$ oder $x=z-\frac{q}{2p}$ gesetzt werden kann, so hat man dadurch den Ausdruck von der Form px^2+qx+r auf einen andern von der Form $pz^2+\gamma$ reduzirt. Dies kann auch (wie §. 137. zu sehen ist) direkt geschehen, indem man in dem gegebenen Ausdruck

1) px^2+qx+r,

$x=z+h$ setzt, ihn dadurch in

2) $pz^2+(2ph+q)z+(ph^2+qh+r)$

übergehen macht, und nun h so bestimmt, daß $2ph+q=0$ wird.

§. 154.

Sind nun p und q und r reelle Ausdrücke, so ist für jeden reellen Werth von x, $\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2$ nothwendig positiv oder Null. Sind also

p und $4pr-q^2$

zugleich positiv, so ist px^2+qx+r für jeden reellen Werth von x, allemal positiv, nie Null und nie negativ. — Und umgekehrt, soll px^2+qx+r für jeden reellen Werth von x, allemal positiv werden, so muß p und $4pr-q^2$ zugleich positiv sein.

Denn wäre p negativ, so würde man $x+\frac{q}{2p}$ so groß genommen sich denken können, daß ohne Rücksicht auf das (+ oder −)

Zeichen, $p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 > \frac{4pr-q^2}{4p}$, also nothwendig

$p\left(x+\frac{q}{2p}\right)^2 + \frac{4pr-q^2}{4p}$ negativ werden würde, für alle diese Werthe von x.

Da endlich für $x = -\frac{q}{2p}$ der ganze Ausdruck px^2+qx+r sich bloß auf $\frac{4pr-q^2}{4p}$ reduzirt, und p nicht 0 und nicht negativ ist, so muß $4pr-q^2$ Null oder ebenfalls positiv sein, je nachdem px^2+qx+r auch für diesen Werth von x, Null oder positiv werden soll.

§. 155.

Aus denselben Gründen müssen

$$p \text{ und } \frac{4pr-q^2}{4p}$$

zu gleicher Zeit negativ, also p negativ und zugleich wiederum $4pr-q^2$ positiv sein, wenn px^2+qx+r für jeden reellen Werth von x allemal negativ, nie Null und nie positiv werden soll.

Anmerkg. 1. Da

$$x = \frac{-q \pm \sqrt{q^2-4pr}}{2p}$$

die Werthe von x sind, welche px^2+qx+r zu Null machen, und weil diesen Ausdruck px^2+qx+r kein reeller Werth zu Null machen kann, so oft er für alle reellen Werthe von x immer fort positiv oder immer fort negativ werden soll, so folgt auch hieraus, daß q^2-4pr negativ, also $4pr-q^2$ positiv sein muß, sowohl dann, wenn px^2+qx+r für alle reellen Werthe von x durchaus immer positiv, als auch dann, wenn er durchaus immer negativ werden soll.

Anmerkg. 2. Diese Bemerkungen der vorhergehenden Paragraphen veranlassen uns aber, den Gang der Werthe von px^2+qx+r, für den Fall, daß statt x nach und nach alle reellen Werthe gesetzt würden, noch näher zu untersuchen. Und zu dem Ende stellen wir nachstehende überaus wichtige Betrachtungen an.

§. 156. Erklärung.

Man kann die Reihe der ganzen Zahlen von der 1 ab ohne Aufhören wachsend, — zwischen je zwei auf einander folgenden ganzen Zahlen p und $p+1$ aber wiederum eine beliebig zu vermehrende Menge gebrochener Zahlen sich denken, z. B.

$$p, \quad p+\frac{1}{n}, \quad p+\frac{2}{n}, \quad p+\frac{3}{n}, \quad p+\frac{4}{n}, \cdots p+\frac{n-1}{n}, \quad p+1,$$

wo n beliebig groß und größer und ohne Aufhören größer werden kann; so daß man sich von der 0 ab, eine ohne Aufhören fort größer werdende Reihe gebrochener und ganzer Zahlen denken kann, deren letzteren Glieder jede noch so groß gegebene Zahl erreichen und übersteigen, während der Unterschied zwischen je zwei auf einander folgenden Gliedern, $=\frac{1}{n}$ ist, also kleiner gedacht werden kann, als jede noch so klein gegebene Zahl, weil n selbst ohne Aufhören fort größer genommen werden darf. — Je zwei in dieser Reihe der Zahlen befindliche, nennen wir nun **stetig** neben einander liegend, wenn man sich diesen Unterschied $\frac{1}{n}$ stets noch kleiner denkt als jede bereits noch so klein gedachte aber bestimmte Zahl. — Diesen Unterschied nennen wir dann eine **unendlich-kleine Zahl**, oder auch eine **Zahl, welche sich im Moment des Verschwindens befindet**.

Wenn wir ferner in der Folge sagen werden „der Werth eines Ausdrucks x sei unendlich-groß gedacht", so verstehen wir darunter, daß für x eine Zahl gesetzt werden soll, welche größer gedacht ist, als eine beliebig gegebene, noch so große aber be-

stimmte Zahl, und wir drücken dies auch wohl dadurch aus, daß wir $x = \infty$ schreiben *). Die unendlich-kleine Zahl bezeichnen wir dann durch $\frac{1}{\infty}$.

Ferner kann man der, zwischen 0 und ∞ liegenden stetig wachsenden Reihe der Zahlen, das (+) Zeichen oder das (−) Zeichen vorsetzen, und erhält dadurch die Reihe aller positiven Zahlen von 0 bis $+\infty$, und die Reihe aller negativen Zahlen von 0 bis $-\infty$; die erstere wachsend, die andere abnehmend, weil die negative Zahl (nach §. 45.) desto kleiner ist, je größer ihr absolutes Glied wird. Die Reihe der stetig auf einander folgenden Zahlen von $+\infty$ an, durch 0 hindurch, bis zu $-\infty$, ist also fortwährend im Abnehmen begriffen und enthält alle reellen Zahlen (§. 44.).

Will man endlich bei der Vergleichung der reellen Zahlen nicht darauf sehen, ob sie positiv oder negativ sind, sondern nur, ob ihr absolutes Glied (z. B. von +3, die Zahl 3, von $-\frac{5}{2}$, die Zahl $\frac{5}{2}$) größer oder kleiner ist, als das absolute Glied irgend einer andern gegebenen reellen Zahl, so fügen wir die Worte hinzu „abgesehen vom (+ oder −) Zeichen" oder die Worte „absolut genommen"; und um zu schreiben, daß von den beiden reellen, positiven oder negativen Zahlen a und b, „absolut genommen" a größer als b sei, schreiben wir in der Folge immer

$$\pm a > \pm b,$$

indem wir die (−) Zeichen gelten lassen, wenn a oder b negativ ist (weil dann $-a$ oder $-b$ die absoluten Glieder vorstellen), die (+) Zeichen dagegen, wenn a oder b positiv sind (weil dann $+a$ oder $+b$ wiederum den absoluten Gliedern gleich kommen).

---

*) Dabei können natürlich die Worte „größer" und „kleiner" stets nur im Sinne des §. 45. verstanden werden, wenn auch hier oben alle negativen Zahlen ausgeschlossen sind.

§. 157. Lehrsätze.

I. Der Ausdruck $x+p$, wenn p eine beliebig reelle Zahl ist, wird $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem für x selbst $+\infty$ oder $-\infty$ gesetzt wird.

II. Der Ausdruck $x+p$ ändert sich mit x zugleich stetig und durchläuft alle stetig neben einander liegenden Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$, wenn x selbst nach und nach alle reellen Werthe von $+\infty$ durch 0 hindurch bis zu $-\infty$ annimmt.

III. Dasselbe ist mit $ax+b$ der Fall, wenn a positiv und b beliebig reell ist; ist dagegen a negativ, so ändern sich zwar die Werthe von $ax+b$ noch stetig, mit den stetig sich ändernden Werthen von x zugleich, aber sie wachsen von dem kleinsten Werth $-\infty$ anfangend bis zu $+\infty$ hin, zu derselben Zeit, wo die Werthe von x, von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmen.

IV. Unter den reellen Werthen von x befindet sich also allemal einer, aber offenbar nur ein einziger, welcher $ax+b$ zu Null macht.

Beweise. 1) Da $x+p$ nur um das gegebene positive oder negative p, absolut genommen, größer oder kleiner ist als x, so fällt von selbst in die Augen, daß $x+p$ mit x zugleich positiv und negativ ohne Ende, abgesehen vom Zeichen, fortwachsen kann, was der Lehrsatz 1.) bloß behauptet hat.

2) Ist h positiv aber im Moment des Verschwindens gedacht, so stellen

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

beliebige drei auf einander folgende der stetig abnehmenden Werthe von x vor. Die 3 zugehörigen Werthe von $x+p$ sind nun

$$(\alpha+p)+h, \quad (\alpha+p) \quad \text{und} \quad (\alpha+p)-h,$$

also noch immer stetig neben einander liegend und abnehmend,

und es müssen daher alle Werthe von $x+p$ von $+\infty$ bis zu $-\infty$ immerfort stetig abnehmen.

3) Da $ax+b = a\left(x+\frac{b}{a}\right) = a(x+p)$ ist, wenn $\frac{b}{a}$ durch p vorgestellt wird, so ist $a(x+p)$ mit $x+p$ zugleich positiv oder negativ, wenn a positiv ist. Ist dagegen a negativ, so ist $a(x+p)$ negativ, so oft $x+p$ positiv, und positiv, so oft $x+p$ negativ wird. — Die 3 zu

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

gehörigen Werthe von $ax+p$ sind nun

$$a(\alpha+p)+ah, \quad a(\alpha+p) \quad \text{und} \quad a(\alpha+p)-ah,$$

d. h. $(a\alpha+b)+ah, \quad a\alpha+b \quad \text{und} \quad (a\alpha+b)-ah;$

und da der Unterschied zwischen je zweien $=ah$ ist, so ist dieser mit h zugleich im Moment des Verschwindens. — Denn gesetzt es wäre ah nicht noch kleiner zu denken als irgend eine noch so kleine Zahl δ, sondern

$$\pm(ah) \overset{=}{>} \pm\delta \text{ *)},$$

so wäre auch
$$\pm h \overset{=}{>} \pm\frac{\delta}{a},$$

während doch h kleiner noch sein muß, als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl, also auch kleiner noch als $\pm\frac{\delta}{a}$. —

Also erhellet auch der Lehrsatz 3.) und mit ihm der letzte 4.) ebenfalls.

§. 158. Lehrsätze.

I. Der Ausdruck x^2+px+q, wenn p und q beliebig reell sind, wird allemal $=+\infty$, man mag $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ nehmen.

---

*) Die Zeichen $\pm ah$, $\pm\delta$ bedeuten hier (dem §. 156.) zufolge allemal absolute Zahlen, nie negative.

II. Die Werthe von x^2+px+q ändern sich stetig mit den stetig von $+\infty$ bis $-\infty$ sich ändernden und abnehmenden Werthen von x zugleich, nehmen aber eine Zeitlang von $+\infty$ bis zu $q-\frac{1}{4}p^2$, also bis zu $+z$, oder bis zu 0, oder bis zu $-z$ ab (unter z eine absolute Zahl gedacht), je nachdem $p^2<4q$, oder $p^2=4q$, oder $p^2>4q$ ist; und wachsen dann von da ab wieder fortwährend bis zu $+\infty$. Der Werth $(+z)$, oder 0, oder $(-z)$, welcher einen Scheidepunkt bildet in der Reihe der Werthe von x^2+px+q, heißt der Kleinste oder ein Minimum.

III. Ist dieser Kleinste der Werthe von x^2+px+q, nämlich $q-\frac{1}{4}p^2$, positiv, d. h. ist $p^2<4q$ oder $\frac{1}{4}p^2<q$, so ist keiner dieser Werthe $=0$, und keiner der reellen Werthe von x macht also dann x^2+px+q zu Null. Die beiden Werthe von x, welche die Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

identisch machen, sind also dann beide imaginär.

IV. Ist dieser kleinste der Werthe von x^2+px+q, der Null gleich, ist also $p^2=4q$ oder $\frac{1}{4}p^2=q$, so ist es einer der reellen Werthe von x, welcher $x^2+px+q=0$ identisch macht, aber auch nur ein einziger.

V. Ist aber dieser Kleinste der Werthe von x^2+px+q negativ, d. h. ist $p^2>4q$ oder $\frac{1}{4}p^2>q$, so gehen die Werthe von x^2+px+q, von $+\infty$ durch 0 zu $-z$ stetig fort, und von $-z$ an stetig zu $+\infty$ zurück, also noch einmal durch 0 hindurch.

Zwei von allen reellen Werthen von x sind es also dann, welche der Gleichung

$$x^2+px+q=0$$

genügen.

VI. Da

ax^2+bx+c allemal $=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$, also auch

$= a(x^2+px+q)$ werden kann, so gilt alles vorstehende auch von ax^2+bx+c, so lange a positiv ist; ist dagegen a negativ, so fangen die Werthe von ax^2+bx+c von $-\infty$ an, wachsen bis zu einem größten Werth (ein Maximum oder ein Größtes genannt), nämlich bis zu $\frac{4ac-b^2}{a}$ hin, um von da an wieder abzunehmen bis zu $-\infty$ hin.

Beweis. Es ist $x^2+px+q = (x+p)x+q$. Da nun x und $x+p$ beide zugleich $+\infty$ oder beide zugleich $-\infty$ werden, je nachdem man $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ nimmt (nach §. 157. I.), so wird $(x+p)x$ offenbar $+\infty$, und dann auch $(x+p)x+q$ nothwendig $+\infty$, man mag $x = +\infty$ oder $x = -\infty$ nehmen. Dadurch ist I.) außer Zweifel gesetzt. — Ist nun h positiv aber im Moment des Verschwindens gedacht, so sind

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

3 der stetig nebeneinander liegenden und abnehmenden Werthe von x; und wenn der Kürze wegen, der Ausdruck x^2+px+q durch f_x bezeichnet wird, so daß

$$f_{\alpha+h}, \quad f_\alpha \quad \text{und} \quad f_{\alpha-h}$$

die 3, zu den eben gedachten Werthen von x, gehörigen Werthe von f_x sind, so hat man

$$\begin{aligned} f_{\alpha\pm h} &= (\alpha\pm h)^2+p(\alpha\pm h)+q \\ &= (\alpha^2+p\alpha+q)\pm(2\alpha+p)h+h^2. \end{aligned}$$

Demnach sind die Unterschiede je zweier dieser auf einander folgenden Werthe von f_x,

$$1)\quad f_{\alpha+h}-f_\alpha = (2\alpha+p)h+h^2 = (2\alpha+p+h)h,$$

$$2)\quad f_\alpha-f_{\alpha-h} = (2\alpha+p)h-h^2 = (2\alpha+p-h)h;$$

d. h. diese Unterschiede sind mit h zugleich im Moment des Verschwindens. Könnte nämlich einer dieser Unterschiede $(2\alpha+p+h)h$ nicht mehr kleiner werden, als eine noch so klein gedachte, aber bestimmte Zahl δ, so also daß höchstens

$$\pm(2\alpha+p\pm h)\cdot h \geqq \pm\delta \text{ *)}$$

werden könnte, so hätte man

$$h \geqq \pm\frac{\delta}{2\alpha+p\pm h}, \quad \text{also} \quad h > \pm\frac{\delta}{2\alpha+p+1},$$

weil ein Bruch desto kleiner wird, je größer sein Nenner ist; also wäre dann h nicht im Moment des Verschwindens gedacht, was gegen die Voraussetzung ist. Es ändern sich also die Werthe von f_x mit denen von x zugleich stetig.

So lange nun die Unterschiede 1.) und 2.) beide positiv sind, so lange nehmen offenbar die Werthe von f_x mit denen von x zugleich ab. So lange dagegen diese Unterschiede (1., 2.) negativ sind, so lange wachsen die Werthe von f_x, wenn die Werthe von x abnehmen. Und wenn endlich von diesen Unterschieden der eine positiv, der andere dagegen negativ ist, so bildet der Werth f_α von f_x einen Scheidepunkt, in so ferne dann die zu den nächstgrößern und nächstkleinern Werthen $\alpha+h$ und $\alpha-h$ von x, gehörigen Werthe von f_x, alle beide größer oder alle beide kleiner sind, als der zu $x=\alpha$ gehörige. Nun sind aber diese Unterschiede (1., 2.) offenbar beide positiv, wenn $2\alpha+p$ positiv ist, und beide negativ, wenn $2\alpha+p$ negativ gefunden wird; in so ferne, wie klein auch $2\alpha+p$ gedacht werden mag, h doch immer noch kleiner gedacht worden ist, in so ferne also $2\alpha+p\pm h$, im erstern Falle doch immer positiv, im andern dagegen allemal negativ ist. — Und nur wenn

$$2\alpha+p=0, \quad \text{also} \quad 3)\quad \alpha=-\tfrac{1}{2}p$$

wird, ist der erste jener Unterschiede, $f_{\alpha+h}-f_\alpha$ nämlich, $=+h^2$ also positiv, der andere $f_\alpha-f_{\alpha-h}$ dagegen $=-h^2$, also negativ; so daß also f_α jetzt, wo $f_{(-\frac{1}{2}p)}$ daraus geworden, kleiner ist, als $f_{\alpha+h}$ und zugleich kleiner als $f_{\alpha-h}$, also ein Minimum (ein Kleinstes) ist.

*) Es bedeutet hier $\pm z$ (dem §. 156. zufolge) allemal eine absolute, und nie eine negative Zahl.

Dieses Minimum, d. h. dieser kleinste Werth von f_x ist aber

$$=(\tfrac{1}{2}p)^2-p(\tfrac{1}{2}p)+q \quad \text{d. h.} \quad =q-\tfrac{1}{4}p^2,$$

so daß also f_x von $+\infty$ bis zu $q-\frac{1}{4}p^2$ abnimmt, und von da ab wieder zu $+\infty$ stetig zurückkehrt, alle zwischenliegenden Werthe durchlaufend, während dem x alle reellen Werthe, von $+\infty$ anfangend und bei $-\infty$ aufhörend, gegeben werden. Ist demnach $q-\frac{1}{4}p^2$ positiv, so ist keiner der Werthe von f_x, 0 oder negativ. Ist $q-\frac{1}{4}p^2=0$, so ist doch keiner der Werthe von f_x negativ. Ist aber $q-\frac{1}{4}p^2$ negativ, so gehen die Werthe von f_x von $+\infty$ an, durch Null hindurch, stetig bis zu diesem negativen und kleinsten Werthe $q-\frac{1}{4}p^2$ fort, und von da ab wieder stetig, also durch 0 noch einmal hindurch, zu $+\infty$ zurück. Und dadurch sind die Behauptungen II.—V.) erwiesen.

Anmerkg. 1. Wir haben (im §. 137.) aus

$$x^2+px+q=0,$$

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}$$

gefunden, welche beiden Werthe von x hier reell sein mögen, in so ferne wir hier $\frac{1}{4}p^2-q$ positiv annehmen wollen. Ist nun q positiv, so ist

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2-q}<\pm\tfrac{1}{2}p$$

also offenbar beide Werthe von x negativ, wenn p positiv; dagegen beide Werthe von x positiv, wenn p negativ ist. — Ist aber q negativ, so ist $\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-q}>\pm\frac{1}{2}p$; folglich ist dann allemal einer der Werthe von x positiv und der andere negativ, mag p übrigens positiv oder negativ oder Null sein. Dasselbe folgt aber auch schon daraus, daß q jedesmal (nach §. 148. N. 2.) das Produkt derselben beiden Werthe von x ist.

Anmerkung 2. Es ist sehr interessant, aus dem Gange der Werthe von f_x, auch früher bereits als wahr erkannte Sätze hier auf's Neue hervorgehen zu sehen.

Namentlich ist es interessant, die Sätze der §§. 154. u. 155. noch einmal auch hieraus ableiten zu können, in so ferne man

$$px^2+qx+r = p\left(x^2+\frac{q}{p}x+\frac{r}{p}\right) = p(x^2+p_1x+q_1)$$

schreiben kann, und wenn man bemerkt, daß px^2+qx+r mit $x^2+p_1x+q_1$, zugleich positiv oder zugleich negativ ist, so lange p positiv, daß aber wenn p negativ ist, für jeden reellen Werth von x, die Werthe von px^2+qx+r und von $x^2+p_1x+q_1$ allemal entgegengesetzte ($+$ oder $-$) Zeichen haben werden.

Zehntes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen ax^3+bx^2+cx+d vom dritten Grade. Von den Werthen von x, welche sie zu Null machen. Von der allgemeinen Kubikwurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehreren Unbekannten, welche zu kubischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

Erste Abtheilung.

Von der Auflösung der kubischen Gleichung und von der allgemeinen Kubikwurzel.

§. 159.

Setzt man in der im §. 131. definirten allgemeinen n^{ten} Wurzel $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ den Wurzel-Exponenten $n=3$, so hat man die allgemeine Kubikwurzel $\left(\sqrt[3]{a}\right)$, und man versteht also unter dem Zeichen

$$\sqrt[3]{a}$$

jeden Ausdruck der die Eigenschaft hat, mit 3 potenzirt, (den Radikanden) a zu geben.

Es giebt aber immer drei und nie mehr als drei einander nicht gleiche Ausdrücke (Formen), welche diese Eigenschaft mit einander gemein haben. Ist nämlich α einer dieser Ausdrücke und x irgend ein anderer oder derselbe, so hat man diesen Voraussetzungen zufolge,

1) $\alpha^3 = a$ und 2) $x^3 = a$,

also

3) $x^3 - \alpha^3 = 0$

d. h.

4) $(x-\alpha)\cdot(x^2+\alpha x+\alpha^2) = 0$

d. h. entweder

5) $x-\alpha = 0$, nämlich $x = \alpha$

oder

6) $x^2+\alpha x+\alpha^2 = 0$

d. h.

7) $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \frac{x}{\alpha} + 1 = 0$,

woraus (nach §. 137.)

8) $\frac{x}{\alpha} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$,

mithin

9) $x = \alpha\cdot(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1})$

hervorgeht.

§. 160.

1) Wird also die eine der drei unter $\sqrt[3]{a}$ zu verstehenden Formen insbesondere durch $\sqrt[3]{a}$ bezeichnet, so kann man die 3 Werthe der $\sqrt[3]{a}$ vorgestellt sich denken durch

$$\sqrt[3]{a}\times 1, \quad \sqrt[3]{a}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{a}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}),$$

wo in den drei Produkten der erste Faktor $(\sqrt[3]{a})$ jedesmal einen und denselben ihrer Werthe (eine und dieselbe ihrer drei Formen) vorstellt, während in den zweiten Faktoren dieser Produkte die $\sqrt{3}$ ihren absoluten Werth, die $\sqrt{-1}$ aber als stets eine und dieselbe ihrer beiden Formen $(+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1})$ vorstellend angesehen wird.

2) Wir wollen von nun an durch den Buchstaben i eine und dieselbe der beiden Formen von $\sqrt{-1}$ bezeichnen, so daß beide Formen (Werthe) von $\sqrt{-1}$

durch $+i$ und durch $-i$

vorgestellt sind.

3) Dann sind alle drei Werthe (Formen) von $\sqrt[3]{a}$ vorgestellt durch die Produkte

$$\sqrt[3]{a}\times 1,\quad \sqrt[3]{a}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})\ \text{und}\ \sqrt[3]{a}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}),$$

in denen der erste Faktor $\sqrt[3]{a}$ jedesmal einen und denselben Werth vorstellt.

4) Die drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$ sind daher:

$$1,\quad -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}\ \text{und}\ -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$$

weil einer derselben offenbar $=1$ ist*).

5) Die drei Werthe der allgemeinen Kubikwurzel $\sqrt[3]{a}$ findet man also (nach NN. 3. u. 4.), wenn man irgend einen derselben nach und nach mit den drei Werthen von $\sqrt[3]{1}$ multiplicirt.

6) Ist α irgend ein Werth von $\sqrt[3]{1}$, so sind die Potenzen α^2, α^3, α^4, u. s. w., desgleichen α^{-1}, α^{-2}, α^{-3}, α^{-4}, ... d. h. $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, $\frac{1}{\alpha^4}$, 2c. 2c. ebenfalls Werthe von $\sqrt[3]{1}$ und entweder derselbe oder einer der beiden andern.

---

*) Multiplicirt man $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$ mit sich selbst, so erhält man zunächst die Quadrate $\frac{1}{4}$ und $-\frac{3}{4}$ der beiden Theile und dann noch das doppelte Produkt derselben $-\frac{1}{2}i\sqrt{3}$; also $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$; wird dies nun noch einmal mit $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$ multiplicirt, so erhält man $(-\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})^2$ d. h. $\frac{1}{4}-(-\frac{3}{4})$, also 1.

Dasselbe ergiebt sich aus der Formel $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, wenn man $-\frac{1}{2}$ statt a und $\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3}$ statt b setzt.

Denn, es mag n positiv oder negativ ganz sein, so ist doch allemal

$$(\alpha^n)^3 = \alpha^{3n} = (\alpha^3)^n = 1^n = 1$$

wenn $\alpha^3 = 1$ ist.

7) Ist α irgend einer der imaginären Werthe $(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i\cdot\sqrt{3})$ von $\sqrt[3]{1}$, so ist α^2 allemal der andere imaginäre Werth und α^3 der reelle Werth 1.

Denn wäre $\alpha^2 = \alpha$, so folgerte, wenn man durch α dividirte, $\alpha = 1$, was gegen die Voraussetzung ist. — Und wäre $\alpha^2 = 1$, so folgerte, wenn man mit α multiplicirte, $\alpha^3 = \alpha$ d. h. $1 = \alpha$, was wieder gegen die Voraussetzung ist.

Anmerkg. Aus N. 3. folgt auch noch, daß die drei Werthe der $\sqrt[3]{-1}$ folgende sind, nämlich

$$-1, \quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\cdot\sqrt{3},$$

weil einer derselben offenbar $= -1$ ist.

Ist aber α einer der drei Werthe von $\sqrt[3]{-1}$, so ist α^n, wenn n positiv oder negativ ganz ist, entweder abermals ein Werth von $\sqrt[3]{-1}$ und dies ist der Fall, so oft n (positiv oder negativ ganz, aber) ungerade ist, oder es ist α^n ein Werth von $\sqrt[3]{+1}$ und dies ist der Fall so oft n (positiv oder negativ ganz, aber) gerade ist.

Ist also α irgend einer der drei Werthe von $\sqrt[3]{-1}$, so ist α^2 allemal einer der drei Werthe von $\sqrt[3]{+1}$.

Denn es ist allemal

$$(\alpha^n)^3 = \alpha^{3n} = (\alpha^3)^n = (-1)^n = \pm 1,$$

je nachdem n gerade oder ungerade ist (übrigens positiv oder negativ).

§. 161.

Untersuchen wir die Gesetze der Wurzeln, wie solche im §. 15. festgestellt worden sind, in Bezug auf die jetzigen allge-

meinen dreideutigen Kubikwurzeln, und sehen wir zu, welche Modifikationen sie erleiden, so finden wir, daß folgende Gleichungen allgemein wahr sind, nämlich

56) $(\sqrt[3]{a})^3 = a$. (Definition);

57) $\sqrt[3]{(a^3)} = a \cdot \sqrt[3]{1}$,

wenn $\sqrt[3]{1}$ ihre drei Werthe vorstellt;

58) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$; 59) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$;

60) $\sqrt[3]{(a^n)} = a^{\frac{n}{3}} \cdot \sqrt[3]{1}$, wenn $\frac{n}{3}$ wie n (positiv oder negativ) ganz oder 0;

61) $a \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{(a^3 b)}$; 62) $\frac{\sqrt[3]{a}}{b} = \sqrt[3]{\left(\frac{a}{b^3}\right)}$

und

63) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{b}\right)}$.

Die Gleichung 56.) ist nämlich die Definition der allgemeinen Kubikwurzel. — In der Gleichung 57.) stehen rechts die drei Werthe der allgemeinen Kubikwurzel zur Linken. — Die Gleichungen 58.) und 59.) enthalten zur Linken und zur Rechten gleich viele, nämlich drei Werthe, und genau dieselben. Denn, wenn man die drei Werthe α, α^2 und α^3 oder 1 der $\sqrt[3]{1}$ mit jedem derselben drei Werthe multiplicirt oder dividirt, so bekommt man zwar jedesmal neue Werthe, die sich aber augenfällig auf dieselben drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$ zurückziehen. — Die übrigen Formeln verstehen sich von selbst.

Anmerkung. Was in der Anmerkung zu §. 135. über das Arbeiten mit allgemeinen Quadratwurzeln gesagt ist, gilt

daher mutatis mutandis auch in Bezug auf die oben definirten allgemeinen Kubikwurzeln.

§. 162.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes der Kubikwurzel (des Zeichens $\sqrt[3]{a}$) kann nun auch die reine kubische Gleichung

$$x^3 = a \quad \text{oder} \quad x^3 - a = 0$$

aufgelöst werden.

Stellt nämlich γ irgend eine der drei Formen der $\sqrt[3]{a}$ vor, so ist $\gamma^3 = a$, und folglich die vorstehende kubische Gleichung $x^3 - a = 0$, jetzt so zu schreiben:

$$x^3 - \gamma^3 = 0 \quad \text{oder} \quad (x-\gamma)\cdot(x^2+\gamma x+\gamma^2) = 0.$$

Dies giebt nun

$$\text{entweder} \quad x - \gamma = 0 \quad \text{oder} \quad x^2+\gamma x+\gamma^2 = 0,$$

d. h. $x = \gamma$ oder $x = \gamma\cdot(-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3})$.

Stellt also, wie kurz vorher, α einen der beiden imaginären Werthe $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ der $\sqrt[3]{1}$ vor, so daß α^2 den andern und α^3 oder 1 den dritten der drei Werthe der $\sqrt[3]{1}$ darstellt, so sind die drei Werthe von x, welche der reinen kubischen Gleichung $x^3 = a$ genügen, ausgedrückt durch

$$\sqrt[3]{a}, \quad \alpha\cdot\sqrt[3]{a} \quad \text{und} \quad \alpha^2\sqrt[3]{a},$$

wo $\sqrt[3]{a}$ stets eindeutig gedacht ist. Jeder dieser drei Werthe hat also die Eigenschaft, daß er, statt x gesetzt, die gegebene reine kubische Gleichung identisch (richtig) macht, ohne daß diese drei Werthe einander gleich sind, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $a = 0$ sein sollte.

§. 163.

Die reine kubische Gleichung

$$x^3 = a$$

hat nie mehr als 3 Auflösungen; d. h. es giebt nie mehr als 3 Werthe von x, welche die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß sie in $x^3 = a$ statt x gesetzt, diese Gleichung identisch machen d. h. daß sie mit 3 potenzirt (kubirt) jedesmal einen und denselben Ausdruck liefern.

Denn jeder Werth von x, welcher der Gleichung $x^3 - a = 0$ genügt, muß einen der beiden Faktoren

$$x - \sqrt[3]{a} \quad \text{oder} \quad x^2 + (\sqrt[3]{a}) \cdot x + (\sqrt[3]{a})^2$$

zu Null machen, weil, wenn der eine nicht Null ist, man durch ihn die ganze Gleichung $x^3 - a = 0$ wegdividiren kann, wodurch sich dann der andere Faktor $= 0$ ergiebt.

§. 164. Aufgabe.

Die kubische Gleichung

$$1) \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

nach dem Unbekannten x aufzulösen.

Auflösung. Man suche sie in eine andere mit einer geringern Anzahl von Gliedern, die hernach bequemer zu behandeln ist, zu verwandeln. Zu dem Ende setze man $z + h$ statt x, so geht diese Gleichung 1.) über, in

$$z^3 + (3h + a)z^2 + (3h^2 + 2ah + b)z + (h^3 + ah^2 + bh + c) = 0$$

d. h. in 2) $z^3 + pz + q = 0$,

wenn man h so genommen sich denkt, daß

$$3) \quad 3h + a = 0 \quad \text{d. h.} \quad h = -\tfrac{1}{3}a \quad \text{wird,}$$

und wenn man

$$4) \quad 3h^2 + 2ah + b \quad \text{d. h.} \quad b - \tfrac{1}{3}a^2 \quad \text{durch } p,$$

so wie

$$5) \quad h^3 + ah^2 + bh + c \quad \text{d. h.} \quad c - \tfrac{1}{3}ab + \tfrac{2}{27}a^3 \quad \text{durch } q$$

bezeichnet (vergl. §. 137.).

Man hat nun diese einfachere Gleichung

$$2)\quad z^3+pz+q=0$$

aufzulösen.

Um dies zu bewerkstelligen setze man in ihr wiederum $u+v$ statt z, und suche durch Werthe von u und von v die dadurch entstehende Gleichung

$$6)\quad u^3+v^3+q+(p+3uv)(u+v)=0$$

identisch zu machen, welches geschieht, wenn u und v so gesucht werden, daß

$$7)\quad u^3+v^3+q=0 \quad \text{und zugleich} \quad 8)\quad p+3uv=0$$

wird.

Um aber die Werthe von u und von v zu finden, welche die beiden Gleichungen 7.) und 8.) identisch machen, verfahre man so:

Man findet aus 8.):

$$9)\quad u=-\tfrac{1}{3}\frac{p}{v}=\frac{-\frac{1}{3}p}{v},$$

welcher Werth statt u gesetzt, die Gleichung 8.) identisch, und die 7.) in

$$10)\quad \frac{-\frac{1}{27}p^3}{v^3}+v^3+q=0,$$

oder, wenn mit v^3 multiplicirt wird, in

$$11)\quad (v^3)^2+q\cdot(v^3)-\tfrac{1}{27}p^3=0$$

übergehen macht, welche letztere Gleichung, wenn man v^3 als den Unbekannten ansieht, quadratisch ist, und nach (§. 137.) aufgelöst:

$$12)\quad v^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}$$

gibt. Diese Gleichung ist aber wieder nach dem Unbekannten v eine reine kubische und gibt nach (§. 162.) aufgelöst:

$$13)\quad v=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

welcher Ausdruck, wegen des doppelten Radikanden, und weil die Kubikwurzel 3deutig ist, 6 verschiedene Werthe für v liefert *). Zu jedem dieser Werthe von v, gehört nun der einzige Werth von u in 9.), nämlich

$$14) \quad u = \frac{-\frac{1}{3}p}{v} = \frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}.$$

Und weil diese Werthe von u und v die Gleichungen 7.) und 8.) identisch machen, so machen sie auch die Gleichung 6.) d. h. die Gleichung 2.) identisch, wenn in letzterer u+v statt z gesetzt wird, d. h. wenn

$$15) \quad z = v + u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$$

genommen wird, wo jede Quadratwurzel und jede Kubikwurzel jedesmal einen und denselben ihrer Werthe vorstellt.

Und wenn die Gleichung 2.) durch diesen Werth von z identisch wird, so wird die Gleichung 1.) identisch, so oft man, nach 3.):

$$16) \quad x = z - \frac{1}{3}a = -\frac{1}{3}a + v + u = -\frac{1}{3}a + v + \frac{-\frac{1}{3}p}{v}$$

$$= -\frac{1}{3}a + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}} + \frac{-\frac{1}{3}p}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}}$$

nimmt, und dabei nach 4.) und 5.)

$b - \frac{1}{3}a^2$ statt p

und $c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$ statt q

---

*) Dies kommt daher, weil die Gleichung 11.) so geschrieben werden kann:

$$v^6 + qv^3 - \frac{1}{27}p^3 = 0,$$

also nach v vom 6ten Grade ist; und später werden wir erfahren, daß jede Gleichung vom 6ten Grade 6 Auflösungen gibt.

schreibt, oder geschrieben sich denkt; endlich für jede der vorkommenden Wurzelformen, so oft sie auch erscheint, doch immer einen und denselben ihrer Werthe setzt.

Dabei findet man für z, also auch für x, 6 Werthe, weil jeder der 6 Werthe von v, statt v gesetzt werden kann. Diese 6 Werthe sind aber vielleicht nicht alle von einander verschieden, so daß sie in eine geringere Anzahl noch wirklich verschiedener Werthe zusammenfallen können, was nun noch näher untersucht werden muß.

§. 165.

So wie v 6 Werthe hat, so hat auch u 6 Werthe, weil zu jedem andern Werth von v, auch ein anderer Werth von u gehört, in so ferne immer $u = \frac{-\frac{1}{3}p}{v}$ genommen werden muß, wenn alle beide Gleichungen 7.) und 8.) nämlich

$$7)\quad u^3+v^3+q=0 \qquad \text{und} \qquad 8)\quad p+3uv=0$$

zugleich identisch werden sollen. Man konnte aber diese 6 Werthe von u direkt und genau so finden, wie oben die 6 Werthe von v gefunden worden sind. Es wird nämlich die Gleichung 8.) identisch, wenn man

$$9)\quad v = \frac{-\frac{1}{3}p}{u}$$

nimmt, und die Gleichung 7.) geht dadurch über in

$$10)\quad u^3 - \frac{\frac{1}{27}p^3}{u^3} + q = 0,$$

welche also noch durch zu findende Werthe von u identisch gemacht werden muß, wenn 7.) und 8.) zugleich identisch sein sollen. Diese letztere Gleichung liefert aber

$$11)\quad (u^3)^2 + q(u^3) - \tfrac{1}{27}p^3 = 0,$$

$$12)\quad u^3 = -\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3},$$

$$13)\quad u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}},$$

so daß man für u genau dieselben 6 Werthe erhält als (§. 164. N. 13.) solche für v gefunden worden sind. — Weil wir aber wohl wissen, daß zu jedem Werth von v nur ein einziger Werth von u gehört, so fragt sich jetzt, welcher von den 6 hier in 13.) stehenden Werthen von u, muß zu einem bestimmten der 6 Werthe von v (aus §. 164. N. 13.) genommen werden? — Offenbar gehören immer zwei solche Werthe von v und u zusammen, welche beide Gleichungen 7.) und 8.) zugleich identisch machen, weil sie gerade so gesucht worden sind. Damit aber 7.) d. h. $u^3+v^3+q=0$ identisch wird, müssen die Werthe der Quadratwurzeln in u und in v mit verschiedenen (+ oder —) Zeichen versehen sein, so daß man

$$15)\qquad z = v+u = u+v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}}$$

schreiben kann, indem man die oberen (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die unteren zugleich gelten läßt.

Weil aber auch noch 8.), nämlich

$$14)\qquad p+3uv=0 \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{3}p+uv=0$$

identisch werden muß, so muß man zu jedem der 3 Werthe der ersten Kubikwurzel (für v), allemal den einzigen Werth der andern Kubikwurzel (für u) dazu nehmen, welcher $u=\frac{-\frac{1}{3}p}{v}$ oder $uv=-\frac{1}{3}p$ macht, welches jedoch in der allgemeinen Formel nicht weiter ausgedrückt werden kann, sondern nur im Gedächtniß behalten werden muß, weswegen der Ausdruck für z in (Nr. 15. des §. 164.) besser ist, weil er nichts voraussetzt, als daß die Wurzeln alle einen und denselben ihrer Werthe vorstellen, was ohnedies gerne angenommen wird.

Anmerkung 1. Man konnte den hier (N. 13.) gefundenen Werth für u, auch aus dem (N. 14. des §. 164.) gefundenen ableiten. Jener liefert nämlich

$$u^3 = \frac{(-\frac{1}{3}p)^3}{v^3} = \frac{-\frac{1}{27}p^3}{-\frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}}.$$

Multiplicirt man hier, wie in solchen Fällen gewöhnlich, Zähler und Nenner des Bruches zur Rechten,

mit $-\frac{1}{2}q \mp \sqrt{\frac{1}{4}q^2 + \frac{1}{27}p^3}$,

damit die Wurzel aus dem Nenner herausfalle, so wird der neue Nenner

$$\tfrac{1}{4}q^2 - (\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3) \quad \text{d. h.} \quad -\tfrac{1}{27}p^3$$

und hebt sich gegen den alten Zähler $-\frac{1}{27}p^3$ weg, so daß man bloß

$$u^3 = -\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3},$$

d. h. $$u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

erhält, wie solches in (N. 13. des §. 165.) gerade so gefunden worden.

Anmerkung 2. Man konnte auch im (§. 164.), wo die Werthe von u und von v gesucht werden, welche die Gleichungen

$$7) \quad u^3 + v^3 + q = 0 \quad \text{und} \quad 8) \quad p + 3uv = 0$$

identisch machen, folgende Betrachtungen anstellen: Die Ansicht dieser Gleichungen 7.) und 8.) zeigt sogleich, das sie in Bezug auf u und v symmetrisch sind, d. h. daß sie sich nicht verändern, wenn auch in ihnen u und v mit einander vertauscht werden. Dieselbe Form, welche für v gefunden worden, mußte sich also genau auch, wie solches (§. 165.) noch besonders zu sehen war, auch für u ergeben; so daß also, so wie

$$v = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

gefunden war, sogleich auch

$$u = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3}}$$

hingeschrieben werden konnte. Aber daraus, daß sich für u und v ganz genau eine und dieselbe Form ergeben hat, kann gar nicht gefolgert werden, daß beide, nämlich u und v, einander gleich sind, weil diese Form 6deutig ist, und, während für v einer der 6 Werthe genommen wird, gerade ein anderer dieser 6 Werthe für u genommen werden muß, wie sich solches sogleich bestätigt, wenn man die (§. 165.) gemachte Untersuchung anstellt und die zusammengehörigen Werthe von u und v heraussucht, diejenigen nämlich, welche beide Gleichungen 7.) und 8.) zugleich identisch machen.

§. 166.

Ferner folgt jetzt sogleich, daß, obgleich v und u 6 Werthe haben, doch $z=u+v$, also auch $x=-\frac{1}{3}a+z$ in den Gleichungen 2.) und 1.) des (§. 164.), nämlich in

2) $z^3+pz+q=0$

und 1) $x^3+ax^2+bx+c=0,$

nicht mehr als 3 wirklich von einander verschiedener Werthe erhalten; weil, wenn man in v das − Zeichen der Quadratwurzel, also in u das + Zeichen der Quadratwurzel nimmt, die Werthe von u und von v sich bloß vertauschen, dagegen die Summe u+v oder v+u doch immer die alte bleibt. Man kann daher recht gut

$$z=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$$

nehmen, unter der Quadratwurzel nur einen einzigen, aber einen und denselben ihrer beiden Werthe sich denken, und die beiden Kubikwurzelwerthe so heraussuchen, daß sie beide mit einander multiplicirt, gerade $-\frac{1}{3}p$ geben. — In dieser Gestalt heißt der Ausdruck für z, welcher der kubischen Gleichung 2.) genügt, die kardanische Formel.

Anmerkung. Sind v_1 und u_1 solche Werthe von v und u, d. h. von den Kubikwurzeln

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}} \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}},$$

für welche wirklich $\frac{1}{3}p+uv$ d. h. $\frac{1}{3}p+v_1u_1, =0$ ist, so sind die 3 Werthe von z folgende

$$z=v_1+u_1$$

$$z=v_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+u_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

und
$$z=v_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+u_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

weil das Produkt

$$(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

allemal $=1$ ist, und weil

$$v_1, \quad v_1(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \quad \text{und} \quad v_1(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

nach (§. 160.) die 3 Werthe von v sind.

§. 167.

Jede kubische Gleichung liefert also für den Unbekannten 3 Werthe, nie mehr als 3, in so ferne aber zuweilen weniger als 3, als alle 3 Werthe oder doch zweie davon einander gleich werden können, für gewisse Werthe der Koeffizienten der gegebenen Gleichung.

Jede kubische Gleichung

$$Ax^3+Bx^2+Cx+D=0$$

kann nämlich, wenn man durch A wegdividirt, in

$$x^3+\frac{B}{A}x^2+\frac{C}{A}x+\frac{D}{A}=0$$

d. h. wenn a, b, c, statt $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$ und $\frac{D}{A}$ gesetzt wird, in

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

übergehen, also in dem vorhergehenden ihre Auflösung finden.

Folgende Beispiele mögen die Anwendung der Cardan'schen Formel auf specielle Zahlen-Fälle, so wie ihre Schwierigkeiten näher beleuchten.

Beispiel 1. Wenden wir sie auf die Gleichung

$$x^3+1=0$$

an, wo also $a=0$, $b=0$, $c=1$, mithin $p=0$, $q=1$,

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}$$

und

$$x=z=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{0}+\sqrt[3]{(-1)}=\sqrt[3]{(-1)}$$ wird,

so bekommt man, weil -1 einer der Werthe dieser letztern Kubikwurzel ist, die 3 Werthe von x, nämlich

$$-1,\quad (-1)\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}),\quad (-1)\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

d. h. $$-1,\quad \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ und } \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Beispiel 2. Wenden wir sie auf die Gleichung

$$(x-2)(x^2+x+1)=0$$

d. h. auf $$x^3-x^2-x-2=0$$ an,

so ist $a=-1$, $b=-1$, $c=-2$, $p=-\tfrac{4}{3}$, $q=-2\tfrac{11}{27}$

d. h. $$q=-\tfrac{65}{27}; \text{ und } \tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3=\frac{3969}{4\cdot(27)^2};$$

also $$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=\tfrac{63}{54};$$

und $$z=\sqrt[3]{\tfrac{65}{54}+\tfrac{63}{54}}+\sqrt[3]{\tfrac{65}{54}-\tfrac{63}{54}}=\sqrt[3]{\tfrac{64}{27}}+\sqrt[3]{\tfrac{1}{27}}.$$

Nun sind die 3 Werthe von $\sqrt[3]{\tfrac{64}{27}}$

$$\tfrac{4}{3},\quad \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

und die 3 Werthe von $\sqrt{\tfrac{1}{27}}$

$$\tfrac{1}{3},\quad \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) \text{ und } \tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3});$$

und da $uv=-\tfrac{1}{3}p=\tfrac{4}{9}$ werden muß, so muß man die beiden ersten $\tfrac{4}{3}$ und $\tfrac{1}{3}$, dann aber von der ersten Reihe den 2ten, von der andern aber den 3ten, zuletzt von der ersten Reihe den dritten, von der andern aber den 2ten zusammen nehmen, weil

$$(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})=1 \text{ ist;}$$

und man erhält also (Anmerkung zu §. 166.)

$$z = \tfrac{4}{3} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{3},$$

oder $z = \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+\tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) = -\tfrac{5}{6}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$,

oder $z = \tfrac{4}{3}(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+\tfrac{1}{3}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) = -\tfrac{5}{6}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$;

demnach auch, weil $x = z-\tfrac{1}{3}a = \tfrac{1}{3}+z$ ist,

$$x = \tfrac{5}{3}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{6}{3} = 2,$$

oder $x = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$,

oder $x = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}$ *).

Beispiel 3. Wäre aufzulösen die Gleichung

$$(x-2)(x^2+x+2) = 0 \quad \text{d. h.} \quad x^3-x^2-4 = 0,$$

so wäre dasmal $a = -1$, $b = 0$, $c = -4$,

also $p = -\tfrac{1}{3}$, $q = -\tfrac{110}{27}$;

demnach $\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3 = \tfrac{1}{4}\cdot\dfrac{110^2}{27^2}-\dfrac{1}{27^2} = \dfrac{12096}{54^2}$,

und $\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3} = \dfrac{\sqrt{12096}}{54} = \dfrac{109,981\cdots}{54} = \dfrac{54,991}{27}$,

und $z = \sqrt[3]{+\tfrac{55}{27}+\dfrac{54,991}{27}}+\sqrt[3]{+\tfrac{55}{27}-\dfrac{54,991}{27}}$.

$$= \sqrt[3]{\frac{109,991}{27}}+\sqrt[3]{\frac{0,009}{27}}.$$

Nimmt man nun zunächst die reellen Werthe dieser Kubikwurzeln nach dem 5ten Kapitel, so erhält man

$$\sqrt[3]{\frac{109,991}{27}} = \tfrac{1}{3}\cdot(4,7\cdots) \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{\frac{0,009}{27}} = \tfrac{1}{3}\cdot(0,2\cdots);$$

---

*) Da die im 2ten Beispiel gegebene Gleichung $x^3-x^2-x-2 = 0$, bereits so geschrieben $(x-2)(x^2+x+1) = 0$ gegeben war, so hätte man die Werthe von x dasmal leichter dadurch finden können, daß man diejenigen suchte, welche den einen oder den andern Faktor zu Null, d. h. welche entweder $x-2 = 0$ oder $x^2+x+1 = 0$ machen.

und da diese reellen Werthe mit einander multiplicirt, wirklich $\frac{1}{9}\cdot(0,9999\cdots)$ d. h. wenn man die Wurzeln auf mehr Decimalen bestimmt) genau $\frac{1}{9}$ oder $-\frac{1}{3}p$ geben, so sind sie schon zusammengehörige Werthe, so daß man findet (wenn nur gehörig viel Decimalstellen berechnet werden):

$$z = \tfrac{1}{3}\cdot(4,7\cdots)+\tfrac{1}{3}\cdot(0,2\cdots)$$
$$= \tfrac{1}{3}\cdot(4,99999\cdots) = \tfrac{5}{3}.$$

Außerdem hat man dann noch

$$z = \tfrac{1}{3}\cdot(4,7\cdots)(-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})+\tfrac{1}{3}(0,2\cdots)(-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$$

d. h. $z = -\frac{5}{6}+(0,7\cdots)\sqrt{-3}$,

oder $z = -\frac{5}{6}-(0,7\cdots)\sqrt{-3}$;

demnach, weil $x = z-\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}+z$ ist,

auch $x = 2$,

$x = -\frac{1}{2}+(0,76\cdots)\sqrt{-3}$,

oder $x = -\frac{1}{2}-(0,76\cdots)\sqrt{-3}$ *).

Beispiel 4. Sei aufzulösen die Gleichung

$$(x-2)(x^2-1) = 0, \quad \text{d. h.} \quad x^3-2x^2-x+2 = 0,$$

---

*) Diese Werthe von x mußte man auch erhalten, wenn man die Werthe suchte, welche

$$x-2 = 0 \quad \text{und} \quad x^2+x+2 = 0$$

machen. Löst man aber letztere Gleichung nach (§. 137.) auf, so erhält man

$$x = -\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-7}.$$

Um sich nun zu überzeugen, daß diese Werthe von x mit obigen zusammenfallen, bemerke man daß

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{-1} = (2,645\cdots)\sqrt{-1}$$

und $$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = (1,732\cdots)\sqrt{-1}$$

ist, setze diese Werthe statt $\sqrt{-7}$ und statt $\sqrt{-3}$ in die obigen für x gefundenen Ausdrücke, berechne alles auf hinlänglich viel Decimalstellen, so wird sich die Identität dieser Ausdrücke, so weit man solche nachgewiesen sehen will, nicht verkennen lassen.

so hat man dasmal

$$a = -2, \quad b = -1, \quad c = 2, \quad \text{alſo} \quad p = -\tfrac{7}{3}, \quad q = \tfrac{20}{27};$$

demnach
$$\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 = \frac{100}{27^2} - \frac{7^3}{27^2} = -\frac{243}{27^2};$$

und
$$\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3} = \tfrac{1}{27}\sqrt{-243};$$

mithin
$$z = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10+\sqrt{-243}} + \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{-10-\sqrt{-243}}\,.$$

Es kommt also nun alles darauf an, daß man aus den imaginären Zahlen $-10 \pm \sqrt{-243}$ die Kubikwurzel zu ziehen verstehe, d. h. diese Kubikwurzel dergestalt umzuformen wisse, daß die Resultate durch Addition vereinigt, und die imaginären Theile herausfallen können.

Wir haben aber in dem Kapitel 5.), welches die Verwandlung der Ziffern-Ausdrücke zum Gegenstand hatte, zwar gelehrt, wie man aus ganzen und gebrochenen Zahlen, die Quadrat-, Kubik- und höhern Wurzeln zieht, dagegen noch nicht, wie man es macht, um aus negativen und imaginären Ausdrücken, so weit solche bis jetzt entstanden sein können, diese Wurzeln zu finden. — Eines der folgenden Kapitel soll jedoch diese Fortsetzung der Ziffernrechnung liefern; dann läßt sich das gegenwärtige Beispiel vollends durchrechnen, und man wird für x die 3 Werthe 2, 1 und -1, wenn auch erst nach mühsamen Rechnungen, wirklich finden.

Anmerkung. In der Folge wird gezeigt werden:

1) Sind in der kubischen Gleichung $x^3+ax^2+bx+c=0$ die Koeffizienten a, b, c alle reell, so sind entweder alle 3 Werthe von x reell, oder doch einer davon; und kommt ein imaginärer Werth von x vor, so sind allemal 2 solche imaginäre Werthe von x vorhanden.

2) Die Cardan'sche Formel enthält nie eine imaginäre Quadratwurzel unter ihren Kubikwurzelzeichen, so lange nur einer der 3 Werthe von x reell ist; diese Quadratwurzeln werden

aber allemal imaginär, so oft alle 3 Werthe von x reell und ungleich sind.

Uebrigens nennt man diesen letztern Fall der Anwendung der Cardan'schen Formel, den irreduktiblen Fall.

§. 168. Zusatz.

Statt, wie dies jetzt geschehen sollte, zwei Gleichungen mit 2 Unbekannten, dann 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, u. s. w. f., zuletzt n Gleichungen mit n Unbekannten zur Auflösung vorzulegen, unter der Voraussetzung, daß eine der gegebenen Gleichungen eine allgemeine Gleichung der 3ten Ordnung, die übrigen aber lauter Gleichungen der ersten Ordnung sind, mögen bloß einige besondere Beispiele hier stehen, welche den Charakter dieser Aufgaben hervorblicken lassen.

Die Endgleichung, welche den einen der Unbekannten liefert, ist eine kubische, gibt für diesen Unbekannten 3 Werthe, während zu jedem dieser Werthe jeder der übrigen Unbekannten nur einen einzigen Werth erhält.

Beispiele.

1) Aus $x+y=a$ und $x^3-y^3=b$,

folgt $2x^3-3ax^2+3a^2x-(a^3+b)=0$,

welche nun nach x aufgelöst werden muß, während zu jedem der 3 Werthe von x, $y=a-x$ sich ergibt.

2) Aus $x+y=a$ und $x^2y-xy^2=b$,

folgt $2x^3-3ax^2+a^2x+b=0$,

woraus 3 Werthe für x, und zu jedem Werth von x, der Werth $y=a-x$ sich ergibt.

3) Aus $4x-3y=7$ und $xy(x+y)=84$,

folgt $4x^3-11x^2+7x-108=0$,

und daraus wieder $x=4$ und $y=\frac{4x-7}{3}=3$;

ferner $x = \frac{-5 \pm \sqrt{-407}}{8}$ und $y = \frac{-19 \pm \sqrt{-407}}{6}$,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich gelten.

4) Aus $x - y = 3$ und $x^3 + y^3 = 133$,

folgt $2x^3 - 9x^2 + 27x - 160 = 0$,

woraus $x = 5$ und $y = x - 3 = 2$;

und auch $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-255}}{4}$ und $y = \frac{-13 \pm \sqrt{-255}}{4}$,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich oder die untern zugleich gelten.

5) Aus $x + y + z = 6$ und $2x + y - z = 2$ und $xyz = 6$,

folgt $3x^3 + 4x^2 - 32x + 24 = 0$,

woraus $x = 2,\ y = 1,\ z = 3$,

aber auch $x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{3}$,

$y = \frac{13 \mp \sqrt{61}}{2}$,

und $z = \frac{7 \pm \sqrt{61}}{6}$ hervorgeht,

wo die obern (+ oder −) Zeichen zugleich oder die untern zugleich gelten.

6) Aus $ax - by = g$ und $a^3x^3 - b^3y^3 = hxy$,

folgt $x = \frac{g}{2a}\left(1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$,

$y = \frac{g}{2b}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{h + abg}{h - 3abg}}\right)$.

Zweite Abtheilung.

Von den ganzen Funktionen vom dritten Grade noch in's Besondere.

§. 169. Lehrsatz.

Ist α einer der Werthe von x, welcher

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

zu Null macht, so läßt sich dieser Ausdruck allemal in zwei Faktoren zerlegen, von welchen der eine $x-\alpha$, der andere aber von der Form $x^2+\beta x+\gamma$ ist.

Beweis. Denn man ziehe $\alpha^3+A\alpha^2+B\alpha+C$, welches nach der Voraussetzung 0 ist, von dem Ausdrucke x^3+Ax^2+Bx+C ab, so erhält man

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x^3-\alpha^3)+A(x^2-\alpha^2)+B(x-\alpha).$$

Weil aber, wie die bloße Multiplikation lehrt:

$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$$

und $$x^2-\alpha^2=(x-\alpha)(x+\alpha)$$

ist, so wird

$$x^3+Ax^2+Bx+C=(x-\alpha)\cdot[x^2+(\alpha+A)x+(\alpha^2+A\alpha+B)]$$

oder $$=(x-\alpha)\cdot[x^2+\beta x+\gamma],$$

wenn $\alpha+A=\beta$ und $\alpha^2+A\alpha+B=\gamma$ gesetzt wird.

§. 170.

Weil $x^2+\beta x+\gamma$ sich wieder in ein Produkt von der Form $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ zerlegen läßt (nach §. 147.), so läßt sich allemal

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

in ein Produkt von der Form

$$(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$

zerlegen.

§. 171. Aufgabe.

Man soll die eben erwähnte Zerlegung direkt vornehmen; d. h. man soll den Ausdruck

1) x^3+Ax^2+Bx+C

direkt in ein Produkt von der Form

2) $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$

zerlegen.

Auflösung 1. Es ist, wenn man multiplicirt:

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma) = x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x+\alpha\beta\gamma. \quad 3.)$$

Weil nun dieser Ausdruck 3.) mit dem gegebenen 1.) identisch sein soll, so muß

4) $\alpha+\beta+\gamma = A$

5) $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = B$

6) $\alpha\beta\gamma = C$ sein,

woraus nun α, β und γ zu entwickeln sind.

Man findet aber aus 4.):

7) $\gamma = A-(\alpha+\beta)$;

und dies in 5.) und 6.) gesetzt, gibt:

8) $\alpha\beta+A(\alpha+\beta)-(\alpha+\beta)^2 = B$

und 9) $A\alpha\beta-\alpha\beta(\alpha+\beta) = C.$

Betrachtet man hier,

10) $\alpha\beta = u$ und 11) $\alpha+\beta = v$

setzend, u und v als die beiden Unbekannten, so sind die Gleichungen 8.) und 9.), d. h. jetzt

8) $u+Av-v^2 = B$

und 9) $Au-u\cdot v = C,$

nach u und nach v aufzulösen. Aus 8.) findet sich aber:

12) $u = v^2-Av+B$;

und dieser Werth in 9.) statt u gesetzt, gibt:

$$13)\quad v^3-2Av^2+(A^2+B)v+(C-AB)=0,$$

woraus sich nach (§. 164.) für v, 3 Werthe ergeben, und dann aus 12.) zu jedem Werth von v ein zugehöriger Werth von u. —

Hat man nun für u und v solche zusammengehörige Werthe gefunden, welche den Gleichungen 8.) und 9.) genügen, so findet man aus 10.) und 11.), nämlich aus:

$$10)\quad \alpha\beta=u \quad \text{und} \quad 11)\quad \alpha+\beta=v,$$

noch α und β dazu, nämlich nach (§. 244.):

$$\alpha=\tfrac{1}{2}v\pm\sqrt{v^2-4u} \quad \text{und} \quad \beta=\tfrac{1}{2}v\mp\sqrt{v^2-4u};$$

und diese Werthe von α und β, so wie $\gamma=A-v$, machen die Gleichungen 4.—6.) identisch, also das Produkt

$$(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$$

mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

identisch.

Auflösung 2. Eine viel einfachere und leichtere Auflösung ist folgende: Soll $x^3+Ax^2+Bx+C=(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$ werden, so sind $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$ die 3 Werthe von x, welche x^3+Ax^2+Bx+C zu Null machen. — Also löse man die Gleichung

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0$$

nach x auf, versehe die 3 Werthe von x, mit dem ihnen vorzusetzenden (—) Zeichen, und nehme diese Resultate für α, β und γ, so hat man das verlangte Produkt.

Anmerkung. Aus dieser zweiten Art die Aufgabe zu behandeln geht zu gleicher Zeit hervor, daß sich x^3+Ax^2+Bx+C nur auf eine einzige Art in ein solches Produkt zerlegen läßt; daß also die 6 Werthe, welche die erste Auflösung für α gibt, paarweise einander gleich sind, und dann sich auf die 3 Werthe

reduziren, welche α, β und γ zusammengehörig haben müssen; so daß jeder Faktor in jeder Stelle ein anderer wird, aber die 3 Faktoren selbst doch immer dieselben bleiben.

Setzt man in $x^3+Ax^2+Bx+C=0$, $-x$ statt x, so geht diese Gleichung über in $x^3-Ax^2+Bx-C=0$; und wären die 3 Werthe von x der ersten Gleichung $-\alpha$, $-\beta$ und $-\gamma$, so sind die 3 Werthe von x in der letztern offenbar $+\alpha$, $+\beta$ und $+\gamma$ d. h. die gesuchten α, β und γ.

§. 172.

Sind also α, β und γ die 3 Werthe von x, welche

$$x^3+Ax^2+Bx+C$$

identisch $=0$ machen, so ist allemal

$$1)\qquad x^3+Ax^2+Bx+C=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

und dann noch

$$2)\qquad A=-(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$3)\qquad B=+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma),$$

$$4)\qquad C=-\alpha\beta\gamma;$$

d. h. der Koeffizient A ist die Summe dieser 3 Werthe mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, der andere B ist die Summe der Produkte je zweier dieser 3 Werthe, und C ist endlich das Produkt aller 3 Werthe, wiederum mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen.

Werden daher künftig 3 Unbekannte α, β und γ gesucht, welche den 3 Gleichungen genügen sollen,

$$\alpha+\beta+\gamma=u,$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=v,$$

$$\alpha\beta\gamma=w;$$

so sind α, β und γ die 3 Werthe von z, welche statt z gesetzt, die Gleichung

$$z^3-u\cdot z^2+v\cdot z-w=0$$

identisch machen. (Vgl. §. 148.).

§. 173. Aufgabe.

Man soll einen Ausdruck von der Form $x+\alpha$ finden, welcher der Kubikwurzel $\sqrt[3]{x^3+Ax^2+Bx+C}$ identisch ist.

Auflösung. Da

$$1)\quad \sqrt[3]{x^3+Ax^2+Bx+C}=x+\alpha$$

sein soll, so hat man

$$2)\quad x^3+Ax^2+Bx+C=(x+\alpha)^3=x^3+3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3,$$

also 3) $3\alpha=A$; 4) $3\alpha^2=B$ und 5) $\alpha^3=C$.
Aus 3.) folgt $\alpha=\frac{1}{3}A$; und dieser Werth in 4.) und 5.) statt α gesetzt, gibt

$$6)\quad \tfrac{1}{3}A^2=B \qquad \text{und} \qquad 7)\quad \tfrac{1}{27}A^3=C,$$

welche beide Gleichungen durch die gegebenen Werthe von A, B, C identisch werden müssen, wenn die Aufgabe selbst möglich sein soll.

§. 174.

Kann man aber x^3+Ax^2+Bx+C nicht immer auf die Form $(x+\alpha)^3$ bringen, so läßt sich derselbe Ausdruck doch immer auf die Form

$$(x+\alpha)^3+\beta(x+\alpha)+\gamma$$

oder auf die Form

$$(x+\alpha)^3+\beta(x+\alpha)^2+\gamma$$

bringen, weil aus den 3 Gleichungen, welche sich zwischen α, β und γ und A, B, C ergeben, wenn man den, in den vorhergehenden Auflösungen betretenen Weg verfolgt, die 3 Unbekannten α, β, γ sich allemal wirklich bestimmen lassen.

§. 175.

Es lassen sich aber diese letztern Umformungen noch einfacher bezwecken, wenn man in x^3+Ax^2+Bx+C, $z+h$ statt x setzt,

ihn also in $(z+h)^3+A(z+h)^2+B(z+h)+C$

d. h. in

$$z^3+(3h+A)z^2+(3h^2+2Ah+B)z+(h^3+Ah^2+Bh+C)$$

übergehen macht; dann aber nach Willkür, entweder h so bestimmt sich denkt, daß der Koeffizient von z^2, nämlich $3h+A$, $=0$, oder so bestimmt, daß der Koeffizient von z, nämlich

$$3h^2+2Ah+B, =0$$

wird. Im erstern Fall wird $h=-\frac{1}{3}A$ und $z=x-h=x+\frac{1}{3}A$.

Im andern Fall wird

$$h=\frac{-A\pm\sqrt{A^2-3B}}{3}$$

und $$z=x-h=x+\frac{A\mp\sqrt{A^2-3B}}{3}.$$

§. 176. Aufgabe.

Man soll den Gang der (reellen) Werthe von

$$x^3+nx^2+px+q,$$

welcher Ausdruck, der Kürze wegen, durch f_x bezeichnet sein kann, angeben, für den Fall, daß n, p, q beliebig reelle Zahlen sind, und daß dem x nach und nach alle stetig neben einander liegenden, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ abnehmenden, reellen Werthe gegeben werden.

Auflösung I. Genau unter den Voraussetzungen der (§§. 157. 158.), nämlich wenn h positiv und im Moment des Verschwindens gedacht ist, sind

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

drei abnehmende, aber stetig auf einander folgende Werthe von x, und

$$f_{\alpha+h}, \quad f_\alpha, \quad \text{so wie} \quad f_{\alpha-h}$$

stellen dann die dazugehörigen Werthe von f_x d. h. von

$$x^3+nx^2+px+q$$

vor.

Und es findet sich sogleich

$$\begin{aligned} f_{\alpha\pm h} &= (\alpha\pm h)^3+n(\alpha\pm h)^2+p(\alpha\pm h)+q \\ &= (\alpha^3+n\alpha^2+p\alpha+q)\pm(3\alpha^2+2n\alpha+p)h \\ &\qquad +(3\alpha+n)h^2\pm h^3; \end{aligned}$$

also

1) $$\begin{aligned} f_{\alpha+h}-f_\alpha &= (3\alpha^2+2n\alpha+p)h+(3\alpha+n)h^2+h^3 \\ &= [3\alpha^2+2n\alpha+p+((3\alpha+n)+h)h]\cdot h; \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} f_\alpha-f_{\alpha-h} &= (3\alpha^2+2n\alpha+p)h-(3\alpha+n)h^2+h^3 \\ &= [3\alpha^2+2n\alpha+p-((3\alpha+n)-h)h]\cdot h. \end{aligned}$$

II. Nun ist f_x mit x zugleich $+\infty$ oder $-\infty$. — Denn es ist

$$f_x \text{ d. h. } x^3+nx^2+px+q = (x^2+nx+p)x+q,$$

während x^2+nx+p für $x=+\infty$ und für $x=-\infty$, allemal $+\infty$ ist (nach §. 158.). Also ist $(x^2+nx+p)x$, und dann auch, nach (§. 157.), der ganze Ausdruck $(x^2+nx+p)x+q$ d. h. f_x entweder $+\infty$ oder $-\infty$, je nachdem $x=+\infty$ oder $x=-\infty$ ist.

III. Daß die Werthe von f_x mit x zugleich stetig sich ändern, erhellet aus den Unterschieden (1. 2. in I.), weil diese Unterschiede alle kleiner als $(3\alpha^2+2n\alpha+p+1)\cdot h$ sind, also, wie (§. 158.) besonders bewiesen steht, mit h zugleich im Moment des Verschwindens sich befinden.

IV. So lange nun der Koeffizient von h, nämlich $3\alpha^2+2n\alpha+p$ positiv ist, so lange sind die Unterschiede (1. 2. in I.) offenbar beide zugleich positiv; dagegen sind letztere beide zugleich negativ, wenn $3\alpha^2+2n\alpha+p$ negativ sein sollte. Denn wie klein auch $3\alpha^2+2n\alpha+p$ immer sein möchte, so ist der andere Theil des in den eckigen Klammern eingeschlossenen Faktors dieser Unterschiede (1. 2. in I.), nämlich $((3\alpha+n)\pm h)\cdot h$ doch allemal noch kleiner d. h. im Moment des Verschwindens, also dieser ganze Faktor nothwendig mit

$$3\alpha^2+2n\alpha+p$$

zugleich positiv oder negativ. —

Im erstern Falle nehmen die Werthe von f_x offenbar mit denen von x zugleich stetig ab. Im andern Falle dagegen wachsen die Werthe von f_x stetig, wenn die von x im stetigen Abnehmen begriffen sind, weil, so oft die Differenz negativ ist, allemal der Subtrahend größer sein muß, als der Minuend.

V. Ist 1) $3\alpha^2+2n\alpha+p=0$,
und zugleich auch 2) $3\alpha+n \quad =0$,
so ist auch 3) $\alpha=-\frac{1}{3}n$,
und dann, wenn dieser Werth in 1.) gesetzt wird,

4) $p-\frac{1}{3}n^2=0$ oder $n^2-3p=0$,

welches offenbar nicht allemal, sondern nur in einzelnen Ausnahmsfällen stattfinden wird. Aber in diesen Ausnahmsfällen d. h. für diesen Werth $\alpha=-\frac{1}{3}n$, sind doch noch beide Unterschiede (1. und 2. in I.) zugleich positiv (und $=h^3$), also die Werthe von f_x noch immer mit denen von x zugleich abnehmend.

VI. Ist aber nicht $n^2-3p=0$, finden also die beiden Gleichungen (1. und 2. in V.) nicht zugleich statt, so kann doch vielleicht die erste allein stattfinden,

nämlich 1) $3\alpha^2+2n\alpha+p=0$

d. h. 2) $\alpha=\dfrac{-n\pm\sqrt{n^2-3p}}{3}$.

Wäre dann n^2-3p negativ, so wären die beiden Werthe von α imaginär, während α einer der reellen Werthe von x sein soll; also muß nun n^2-3p positiv sein, und zwar ist dann wenn α_1 und α_2 die beiden Werthe von α sind,

3) $\alpha_1=\dfrac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$

der größere, und

4) $\alpha_2=\dfrac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$

der kleinere, mag übrigens n positiv oder negativ sein, während

5) $3\alpha + n = \pm\sqrt{n^2 - 3p}$ ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist dann von den Unterschieden (1. 2. in I.) der erstere positiv, der andere negativ, also f_α kleiner als der nächstvorhergehende Werth $f_{\alpha+h}$, und auch kleiner als der nächstfolgende $f_{\alpha-h}$, wenn $3\alpha+n$ d. h. jetzt $\sqrt{n^2-3p}$ positiv, also wenn für α der größere α_1 der beiden Werthe in 2.) gesetzt wird. Dagegen ist von jenen Unterschieden (1. 2. in I.) der erstere negativ, der andere positiv, mithin f_α größer als beide Nachbarwerthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, wenn $3\alpha+n$ d. h. $\sqrt{n^2-3p}$ negativ, also wenn statt α der kleinere α_2 jener beiden Werthe in 2.) genommen worden ist. In beiden Fällen bildet f_α einen Scheidepunkt in dem Gange aller reellen Werthe von f_x; im erstern Falle aber hat f_x von $+\infty$ bis zu dem, zu

$$x = \alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

gehörigen Werthe $f_{(\alpha_1)}$, abgenommen, und fängt von da an wieder zu wachsen, bis man zu $x = \alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$ d. h. zu $f_{(\alpha_2)}$ kommt, während f_x von hier ab wieder abnimmt, und zwar ohne Aufhören bis zu $-\infty$ hin. Der Werth $f_{(\alpha_2)}$ heißt dann ein G r ö ß t e s (Maximum), während $f_{(\alpha_1)}$ ein Kleinstes (ein Minimum) war.

VII. Ist also n^2-3p positiv, so kommen unter allen reellen Werthen von x, zweie α_1 und α_2 vor, welche $3\alpha^2+2n\alpha+p=0$ machen; und es bilden dann die Werthe von f_x zwei Scheidepunkte, den erstern $f_{(\alpha_1)}$, wo die Werthe von f_x, nachdem sie von $+\infty$ an abgenommen haben, wieder anfangen größer zu werden; den andern $f_{(\alpha_2)}$, wo, nachdem dieselben Werthe eine Zeitlang wieder zugenommen haben (nämlich von $x = \alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$, bis zu $x = \alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$)

solche plötzlich wieder anfangen abzunehmen und ohne Aufhören abnehmen, bis zu $-\infty$ hin. (Immer wird aber vorausgesetzt, daß die Werthe von x, von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend gedacht werden).

Ist dagegen $n^2-3p=0$, so gibt es zwar unter den reellen Werthen von x einen einzigen, nämlich $\alpha=-\frac{1}{3}n$, welcher ebenfalls $3\alpha^2+2n\alpha+p=0$ macht, aber für diesen findet unter den Werthen von f_x kein Scheidepunkt statt, sondern es gehen diese von $+\infty$ bis $-\infty$ stetig und ununterbrochen mit x zugleich abnehmend fort.

Ist endlich n^2-3p negativ, so gibt es unter allen reellen Werthen von x keinen α, welcher $3\alpha^2+2n\alpha+p$ zu Null machen könnte, aber auch keinen, welcher $3\alpha^2+2n\alpha+p$ negativ machen könnte (weil nach (§§. 154. 155.) der Koeffizient von α^2 selbst negativ sein müßte); also ist dann für jeden reellen Werth α von x, der Ausdruck $3\alpha^2+2n\alpha+p$ fortwährend positiv; also nehmen dann auch die Werthe von f_x mit denen von x, von $+\infty$ zu $-\infty$ hin ohne Unterbrechung stetig ab.

§. 177.

Aus diesen Untersuchungen geht aber nun sogleich folgendes hervor:

1) Da, während x von $+\infty$ bis zu $-\infty$ stetig abnehmend gedacht wird, die Werthe von f_x von $+\infty$ anfangen und mit $-\infty$ aufhören, aber dazwischen ebenfalls nur stetig sich ändern, so gehen sie nur durch Null hindurch in dem Moment, wo sie vom Positiven in das Negative oder vom Negativen in das Positive übergehen (wenn man den Ausnahmsfall nicht noch berücksichtigen will, wo der Nullwerth von f_x gerade der Scheidepunkt der Werthe ist). Daher kann es nur einen einzigen oder es muß drei reelle Werthe von x geben, welche der Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

genügen. Denn die Werthe von f_x nehmen entweder von $+\infty$ bis zu $-\infty$ ohne Unterbrechung ab (wenn n^2-3p negativ oder

0 ist), oder haben zwei Scheidepunkte (wenn n^2-3p positiv ist), in welchem letztern Falle 3 Unterfälle stecken:

1\. 1.) entweder es gehen die Werthe von f_x, von $+\infty$ stetig abnehmend bis zur positiven Zahl $+z$ fort, kehren dann bis zu einer größern positiven Zahl wachsend zurück, um dann von da ab ohne Aufhören abnehmend (einmal durch Null hindurch) bis zu $-\infty$ fortzugehen;

2\. 2.) oder sie gehen von $+\infty$ bis zur negativen Zahl $-z$ fort, kehren dann bis zu einer größern negativen Zahl (die absolut genommen kleiner als z ist) wachsend zurück, um dann wieder ohne Aufhören bis zu $-\infty$ hin abzunehmen; in diesem Falle gehen sie ebenfalls nur einmal durch Null hindurch;

3\. 3.) oder endlich sie nehmen von $+\infty$ bis zur negativen Zahl $-z$ ab, wachsen dann, bis zur positiven Zahl $+v$ zurückkehrend, um von da ab fortwährend und bis zu $-\infty$ hin wiederum stetig abzunehmen; und in diesem letztern Fall gehen sie offenbar 3 mal durch 0 hindurch.

§. 178.

Es bleibt uns nun noch zu untersuchen, wie die Koeffizienten n, p, q, beschaffen sein müssen, wenn

$$f_x \quad \text{oder} \quad x^3+nx^2+px+q$$

durch drei der reellen Werthe von x zu Null gemacht wird.

Wir haben aber erstlich gesehen, daß dazu n^2-3p nothwendig positiv sein muß. Um nun die weitern Bedingungen zu finden, müssen wir die beiden Scheidepunkte bestimmen, d. h. die Werthe von $f_{(\alpha_1)}$ und $f_{(\alpha_2)}$, welche zu

$$x=\alpha_1=\frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3} \quad \text{und zu} \quad x=\alpha_2=\frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$$

gehören. Substituirt man aber diese Werthe von x in f_x, so erhält man

$$f_{(\alpha_1)} = \frac{27q+2n^3-9np-2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p}}{27}$$

und $$f_{(\alpha_2)} = \frac{27q+2n^3-9np+2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p}}{27},$$

wo die Wurzel ihren absoluten Werth vorstellt. Und es finden also nach (§. 177. N. 3.3.), nur dann drei reelle Werthe von x statt, wenn $f_{(\alpha_1)}$ negativ und zugleich $f_{(\alpha_2)}$ positiv d. h. wenn

$$\pm 2(n^2-3p)\sqrt{n^2-3p} > \pm(2n^3-9np+27q)$$

oder, wenn man auf beiden Seiten die Quadrate nimmt, wenn

$$4(n^2-3p)^3 > (2n^3-9np+27q)^2 \quad \text{ist.}$$

Ist also 1) n^2-3p positiv

und 2) $4(n^2-3p)^3 > (2n^3-9np+27q)^2$,

so sind die 3 Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

genügen, alle dreie reell. — Findet aber eine dieser beiden Bedingungen 1.) oder 2.) nicht statt, so ist von den 3 Werthen von x, welche die Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

identisch machen, nur ein einziger reell, und natürlich sind dann die beiden andern imaginär.

Wendet man dies auf den speciellen Fall an, wo $n=0$ ist, so findet man:

wenn 1) p negativ ist, und

wenn 2) $-4p^3 > 27q^2$ d. h. $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ ebenfalls negativ ist, so gibt die Gleichung

$$x^3+px+q=0$$

drei reelle Werthe von x; wenn aber eine dieser beiden Bedingungen nicht stattfindet, so hat dieselbe Gleichung nur einen einzigen reellen und zwei imaginäre Werthe von x, welche ihr genügen.

Dabei ist jedoch nicht zu übersehen, daß wenn p Null oder positiv ist, dann die 2te Bedingung nie statt haben kann, weil $\frac{1}{4}q^2$ immer positiv sein wird, so daß also auch umgekehrt, so oft die Gleichung

$$x^3+px+q=0$$

nur einen einzigen reellen Werth von x liefert, die Bedingung 2.), daß nämlich $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ negativ ist, nie statt haben kann.

So oft also diese kubische Gleichung nur einen einzigen reellen Werth für x liefert, so oft ist $\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3$ Null oder positiv, so oft befindet sich also die Cardan'sche Formel nicht in dem irreduktiblen Fall, während sie sich allemal in diesem Falle befindet, so oft die 3 Werthe von x, welche der gegebenen kubischen Gleichung $x^3+px+q=0$ genügen, alle reell sind. (Vgl. §. 167. Anmerkung.).

§. 179.

Sind in der kubischen Gleichung

$$1)\qquad x^3+nx^2+px+q=0,$$

die Koeffizienten reell; und ist α ein reeller Werth von x, welcher die 1.) identisch macht, so darf man nur den Ausdruck

$$x^3+nx^2+px+q$$

durch $x-\alpha$ dividiren, und den Quotienten

$$2)\qquad x^2+\beta x+\gamma, =0$$

setzen, wo β, γ ebenfalls reell sein müssen, weil sie ohne Wurzelung erhalten werden; und diese quadratische Gleichung 2.) gibt dann, nach x aufgelöst, die beiden andern Werthe von x, welche die 1.) identisch machen, nach (§. 169.).

Daraus folgt aber der höchstwichtige Satz: daß wenn diese beiden andern Werthe von x imaginär sind, sie allemal auf die Formen

$$P+Q\sqrt{-1}$$

und
$$P-Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden, also nie einander gleich sein können (nach §. 139.).

§. 180.

Betrachten wir nun noch den (§. 177.) erwähnten Ausnahmsfall, wenn nämlich einer der Werthe α_1 oder α_2 von x,

d. h. $\alpha_1 = \frac{-n+\sqrt{n^2-3p}}{3}$ oder $\alpha_2 = \frac{-n-\sqrt{n^2-3p}}{3}$,

zu gleicher Zeit auch

$$f_\alpha = 0 \quad \text{macht, wo}$$

dann f_x nur zweimal 0 wird, d. h. nur für zwei reelle Werthe von x, nämlich für $x = \alpha_1$ oder $x = \alpha_2$ und für noch einen zweiten $x = \beta$.

Betrachten wir diesen Fall zuerst wenn $n = 0$ ist, so hat man dasmal

$$1) \quad \alpha = \frac{\sqrt{-3p}}{3} \quad \text{oder} \quad 3\alpha^2 + p = 0$$

und zugleich 2) $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$,

d. h. wenn man den Werth von α aus 1.) in 2.) substituirt:

$$3) \quad \tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3 = 0;$$

folglich sind nach (§§. 164–166.) die 3 Werthe von x, welche der Gleichung

$$x^3 + px^2 + q = 0 \quad \text{genügen,}$$

jetzt

$$x = 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$$

oder $x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$

oder $x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}) + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}\cdot(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3})$,

unter der $\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$ den einzigen reellen Werth dieser Kubikwurzel

verstanden; und man sieht leicht, daß diese letztern beiden Werthe von x dasmal einander gleich sind und ebenfalls reell werden, weil sie beide in

$$-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q}$$

zusammenfallen.

Ist aber n nicht 0, so daß man noch die allgemeine kubische Gleichung

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

hat, so kann man auch so schließen:

Da jetzt offenbar nur zwei reelle Werthe existiren, $x=\alpha$ und $x=\beta$, welche x^3+nx^2+px+q zu Null machen, so sind die zwei der 3 Faktoren $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$, in welche der Ausdruck x^3+nx^2+px+q zerlegt werden kann, offenbar reell; aber weil $\alpha+\beta+\gamma=-n$, also $\gamma=-n-(\alpha+\beta)$ ist (nach §. 172.), so ist dann auch γ reell, und weil dann 3 verschiedene reelle Werthe α, β und γ existiren würden, welche

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

identisch machen, dasmal aber nur zwei solche Werthe existiren, so muß dasmal γ einem der beiden andern Werthe α oder β gleich sein, und es würde nicht schwer werden, wenn solches nicht schon aus den vorhergehenden Betrachtungen folgerte, noch besonders nachzuweisen, daß $\gamma=\alpha$ sein muß *).

In diesem Falle, wo ebenfalls keiner der Werthe von x, welche

*) Wenn $f_{(\alpha_1)}$ negativ, aber bereits ganz nahe der Null wäre, so würden, wenn $f_{(\alpha_2)}$ wieder positiv ist, drei reelle Werthe für x existiren α, γ und β, von denen jedoch α und γ, sehr wenig von einander verschieden sein könnten, weil α_1 zwischen beiden und dabei sehr nahe an beiden liegen müßte. So wie man sich nun $f_{(\alpha_1)}$ der Null immer näher gerückt denkt, so rücken α und γ dem α_1 immer näher; und so ist anschaulich, wie zuletzt α und γ mit α_1 zusammenfallen müssen.

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

identisch machen, imaginär ist, kann man daher noch immer sagen, daß alle 3 Werthe von x reell sind, nur zwei davon einander gleich.

Anmerkung. Auch können alle 3 Werthe von x einander gleich werden. Dies ist der Fall, wenn x^3+nx^2+px+q sich auf die Form $(x+\frac{1}{3}n)^3$ bringen läßt, also wenn $\frac{1}{3}n^2=p$ und $\frac{1}{27}n^3=q$, also $n^2-3p=0$ und $\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}=-\frac{1}{3}n\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}}$ und dabei $x=-\frac{1}{3}n$ ist. — Die beiden Werthe α von x, welche die Scheidepunkte f_α bilden, sind dasmal einander gleich und $=-\frac{1}{3}n$, sind also dieselben, welche zugleich f_α selbst zu Null machen, und solches gehört zu dem Fall, welcher (§. 176. V.) beobachtet worden ist.

§. 181.

Es bleibt uns nun noch übrig zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die reellen, der Gleichung $f_x=0$ d. h.

$$x^3+nx^2+px+q=0$$

entsprechenden Werthe von x, positiv oder negativ sein werden.

1) Gesetzt es sei nur einer der Werthe von x reell, die beiden andern imaginär, so wird für $x=0$ offenbar $f_x=q$. Ist nun q positiv, so liegt zwischen $x=+\infty$ und $x=0$ keiner der Werthe von x, welcher $f_x=0$ machte; der reelle Werth von x, welcher $f_x=0$ macht, ist also dann negativ. Ist aber q negativ, so ist der reelle Werth von x, welcher $f_x=0$ macht, nothwendig positiv.

2) Sind aber alle 3 Werthe von x, welche $f_x=0$ machen, reell, so sind zwei dieser 3 Werthe von x positiv, der dritte negativ, wenn q positiv ist, und wenn dabei die beiden Werthe α_1 und α_2 von α, aus der Gleichung

$$3\alpha^2+2n\alpha+p=0,$$

nicht alle beide zugleich negativ sind; es ist aber einer nur posi-

tiv und die beiden andern sind dann negativ, wenn q negativ ist, und wenn die gedachten Werthe von α, nicht beide zugleich positiv sind.

Dagegen sind alle 3 Werthe von x positiv, wenn q negativ ist, und wenn die beiden Werthe von α zugleich positiv sind, während die 3 Werthe von x negativ sein werden, so oft q positiv ist, und die gedachten beiden Werthe von α beide zugleich negativ sind.

Die Richtigkeit dieser letztern Behauptungen erhellet eben aus dem Umstand, daß jetzt f_x von $+\infty$ an bis zum negativen $f_{(\alpha_1)}$ abnimmt, dann von $f_{(\alpha_1)}$ bis zum positiven $f_{(\alpha_2)}$ wieder zunimmt, und von da an wieder abnimmt bis zu $-\infty$ hin, daß also von den 3 reellen Werthen von x, welche f_x zu Null machen, der größeste zwischen $+\infty$ und α_1, der nächste zwischen α_1 und α_2, und der kleinste zwischen α_2 und $-\infty$ liegen muß, während $f_x = q$ wird, so oft man $x = 0$ nimmt.

Schluß-Anmerkung.

Wenn für $x = \mu$, f_x positiv, und für $x = \nu$, f_x negativ wird, so liegt nothwendig zwischen μ und ν ein Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht; weil die Werthe von f_x, während die von x zwischen μ und ν stetig fortgehend gedacht werden, selber nur stetig sich ändern, also nur stetig vom Positiven zum Negativen übergehen können, so daß in dem Moment des Uebergehens ein Nullwerth von f_x vorhanden sein muß. — Diese Betrachtung gibt ein Mittel ab, indem man zwischen μ und ν immer zwei Werthe nimmt, welche näher und näher an einander liegen, und für welche f_x einmal positiv, ein andermal negativ wird, dem Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht, sich immer mehr zu nähern. — Weil aber dieses alles in der Lehre der höhern Gleichungen überhaupt noch vorkommt, so mag hier diese kurze Andeutung vorläufig genügen.

Eilftes Kapitel.

Von den ganzen Funktionen vom vierten Grade. Von den Werthen von x, welche sie = Null machen. Von der allgemeinen Biquadrat-Wurzel. Von der Auflösung derjenigen Gleichungen mit mehr Unbekannten, welche zu biquadratischen Gleichungen mit einem Unbekannten führen.

Erste Abtheilung.

Von der Auflösung der biquadratischen Gleichung. Von der allgemeinen Biquadrat-Wurzel.

§. 182.

Setzt man in der im §. 131. definirten allgemeinen n^{ten} Wurzel $(\sqrt[n]{a})$ den Wurzel-Exponenten $n = 4$, so hat man die allgemeine vierte Wurzel $(\sqrt[4]{a})$, und man versteht also unter dem Zeichen

$$\sqrt[4]{a}$$

jeden Ausdruck, der die Eigenschaft hat, mit 4 potenzirt, (den Radikanden) a zu geben.

Es giebt aber immer vier und nie mehr als vier einander nicht gleiche Ausdrücke (Formen), welche diese Eigenschaft mit einander gemein haben. Ist nämlich α einer dieser Ausdrücke und x irgend ein anderer oder derselbe, so hat man diesen Voraussetzungen zufolge,

1) $\alpha^4 = a$ und 2) $x^4 = a$,

also

3) $x^4 - a^4 = 0$

d. h.

4) $(x^2 - \alpha^2) \cdot (x^2 + \alpha^2) = 0$

d. h. entweder

5) $x^2 - \alpha^2 = 0$, nämlich $x = \pm\alpha$

oder

6) $x^2 + \alpha^2 = 0$

d. h.

7) $\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + 1 = 0$

woraus (nach §. 137.)

8) $\frac{x}{\alpha} = \pm\sqrt{-1}$ oder $x = \pm\alpha \cdot \sqrt{-1}$

hervorgeht.

§. 183.

1) Wird also die eine α der vier unter $\sqrt[4]{a}$ zu verstehenden Formen in's Besondere durch $\sqrt[4]{a}$ bezeichnet, so kann man die 4 Werthe der $\sqrt[4]{\alpha}$ vorgestellt sich denken durch

$$\pm\sqrt[4]{a} \text{ und } \pm\sqrt[4]{a} \cdot \sqrt{-1},$$

wo $\sqrt[4]{a}$ jedesmal ein und denselben ihrer vier Werthe vorstellt.

2) Die vier Werthe von $\sqrt[4]{1}$ sind daher

$$\pm 1 \text{ und } \pm i,$$

wenn unter i eine der Formen von $\sqrt{-1}$ verstanden wird.

3) Die vier Werthe der $\sqrt[4]{a}$ findet man also, wenn man die 4 Werthe von der $\sqrt[4]{1}$ mit einer beliebigen der vier Formen der $\sqrt[4]{a}$, jedoch immer mit einer und derselben, multiplicirt.

§. 184.

Untersuchen wir die Gesetze der Wurzeln, wie solche in §. 15. festgestellt worden sind, in Bezug auf die jetzigen allgemeinen vierdeutigen vierten Wurzeln, und sehen wir zu, welche Modifikationen sie erleiden, so finden wir, daß folgende Gleichungen allgemein wahr sind, nämlich

64) $(\sqrt[4]{a})^4 = a.$ (Definition);

65) $\sqrt[4]{(a^4)} = a \cdot \sqrt[4]{1},$

wenn $\sqrt[4]{1}$ ihre vier Werthe vorstellt;

66) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{b};$ 67) $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}};$

68) $\sqrt[4]{(a^n)} = a^{\frac{n}{4}} \cdot \sqrt[4]{1},$ wenn $\frac{n}{4}$ wie n (positiv oder negativ) ganz oder 0;

69) $a \cdot \sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{(a^4 b)};$ 70) $\frac{\sqrt[4]{a}}{b} = \sqrt[4]{\left(\frac{a}{b^4}\right)}$

und

71) $\frac{a}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{\left(\frac{a^4}{b}\right)}.$

Die Gleichung 64.) ist nämlich die Definition der allgemeinen vierten Wurzel. — In der Gleichung 65.) stehen rechts die vier Werthe der allgemeinen vierten Wurzel zur Linken. — Die Gleichungen 66.) und 67.) enthalten zur Linken und zur Rechten gleich viele, nämlich vier Werthe, und genau dieselben, insoferne sich die 16 Werthe zur Rechten auf vier von einander wirklich verschiedene zurückziehen. — Die übrigen Formeln verstehen sich von selbst.

Anmerkung. Was in den Anmerkungen zu §. 135. und §. 161. über das Arbeiten mit allgemeinen Quadrat- und Kubik-Wurzeln gesagt ist, gilt daher mutatis mutandis auch in Bezug auf die oben definirten allgemeinen vierten Wurzeln.

§. 185.

Nach dieser Erweiterung des Begriffes der vierten Wurzel (des Zeichens $\sqrt[4]{a}$) hat aber die reine Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 = a \quad \text{oder} \quad x^4 - a = 0$$

im allgemeinen jedesmal vier Auflösungen, nämlich

$$x = \pm\sqrt[4]{a} \quad \text{und} \quad x = \pm i\cdot\sqrt[4]{a},$$

wo die $\sqrt[4]{a}$ jedesmal eindeutig gedacht ist. Jeder dieser vier Werthe von x hat also die Eigenschaft, daß er, statt x gesetzt, die gegebene Gleichung $x^4 = a$ zu einer identischen (richtigen) macht, ohne daß diese vier Werthe einander gleich sind, den einzigen Fall ausgenommen, in welchem $a = 0$ sein sollte.

§. 186. Aufgabe.

Die allgemeine Gleichung vom 4ten Grade

1) $\quad x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

nach x aufzulösen.

Auflösung. Man verwandle sie zuerst in eine einfachere; setze zu dem Ende $z+h$ statt x, und erhält:

2) $\quad z^4 + (4h+a)z^3 + (6h^2+3ah+b)z^2$
$\quad\quad + (4h^3+3ah^2+2bh+c)z + (h^4+ah^3+bh^2+ch+d) = 0$

oder

3) $\quad z^4 + pz^2 + qz + r = 0,$

wenn h so genommen wird, daß

4) $\quad 4h + a = 0 \quad$ d. h. $\quad h = -\frac{1}{4}a$

ist, und wenn man

5) $6h^2+3ah+b$ d. h. $b-\frac{3}{8}a^2$ durch p,

6) $4h^3+3ah^2+2bh+c$ d. h. $c-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{8}a^3$ durch q,

7) $h^4+ah^3+bh^2+ch+d$ d. h. $d-\frac{1}{4}ac+\frac{1}{16}a^2b-\frac{3}{256}a^4$ durch r

bezeichnet.

Es bleibt nun noch die Gleichung 3.), nämlich

3) $z^4+pz^2+qz+r=0$

nach z aufzulösen.

Zu dem Ende zerlege man zuerst

8) z^4+pz^2+qz+r

für jeden Werth von z (also nicht gerade für denjenigen, welcher diesen Ausdruck zu Null macht, und welcher gesucht wird) in zwei Faktoren von der Form

9) $(z^2+\alpha z+\beta)(z^2+\gamma z+\delta)$.

Letzteres Produkt, wenn man wirklich multiplicirt gibt aber

10) $z^4+(\alpha+\gamma)z^3+(\alpha\gamma+\beta+\delta)z^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)z+\beta\delta$.

Und zieht man daher den Ausdruck 8.), der mit diesem identisch sein soll, von letzterem ab, so ist die Differenz identisch Null, d. h.

11) $(\alpha+\gamma)z^3+(\alpha\gamma+\beta+\delta-p)z^2+(\alpha\delta+\beta\gamma-q)z+(\beta\delta-r)=0$

für jeden Werth von z; also auch nach (§. 121.):

12) $\alpha+\gamma=0$,

13) $\alpha\gamma+\beta+\delta-p=0$,

14) $\alpha\delta+\beta\gamma-q=0$,

15) $\beta\delta-r=0$;

woraus denn α, β, γ und δ gefunden werden müssen. — Man hat zu dem Ende aus 12.):

16) $\gamma=-\alpha$;

und dieser Werth von γ in 13.) und 14.) gesetzt, gibt

17) $\delta+\beta=p+\alpha^2$ und

18) $\delta - \beta = \frac{q}{\alpha}$,

woraus sich sogleich

19) $\delta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha^2 + p + \frac{q}{\alpha}\right)$

und

20) $\beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha^2 + p - \frac{q}{\alpha}\right)$

ergibt. — Werden nun diese Werthe von β und δ in 15.) gesetzt, so ergibt sich

21) $(\alpha^2 + p)^2 - \frac{q^2}{\alpha^2} - 4r = 0$,

woraus

22) $(\alpha^2)^3 + 2p(\alpha^2)^2 + (p^2 - 4r)(\alpha^2) - q^2 = 0$

hervorgeht *).

Diese Gleichung 22.) ist nun nach α^2 eine kubische, wird nach (§. 164.) aufgelöst, und gibt für α^2, 3 Werthe. Und weil jeder Werth μ von α^2, wieder die beiden Werthe $+\sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$ von α gibt; so hat α selbst 6 Werthe, die wir als bereits gefunden ansehen wollen.

Zu jedem der Werthe von α, liefern aber die Gleichungen 16., 19. und 20.) jedesmal einen einzigen Werth von γ, von β und von δ.

Es werden also 6 Parthien zusammengehöriger Werthe von α, β, γ, δ gefunden, so daß allemal

---

*) Die Aufgabe war nämlich die: aus den Gleichungen 12.–15.) γ, β und δ zu eliminiren, so daß bloß eine Endgleichung, nämlich die 22.) in α übrig bleibt, welche dann aufgelöst werden kann, und rückwärtsgehend auch γ, β und δ liefert. Zu dem Ende hat man zuerst γ durch die Substitutions-Methode, dann aber β und δ dadurch eliminirt, daß man aus den 2 neuen Gleichungen β und δ in α ausgedrückt gefunden und diese Werthe vollends in 15.) substituirt hat.

$$(z^2+\alpha z+\beta)\cdot(z^2+\gamma z+\delta) = z^4+pz^2+qz+r$$

wird.

Ist aber dies geschehen, so findet man die gesuchten Werthe von z, wenn man diejenigen sucht, welche

entweder 23) $z^2+\alpha z+\beta=0$

oder 24) $z^2+\gamma z+\delta=0$

machen; und man findet daher nach (§. 138.)

$$z=\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2} \quad \text{und} \quad z=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\delta}}{2},$$

oder, wenn man für γ, β und δ ihre aus 16., 19. und 20.) genommenen Werthe setzt:

$$25) \qquad z=-\tfrac{1}{2}\alpha\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}$$

$$26) \qquad z=+\tfrac{1}{2}\alpha\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}},$$

welche Gleichungen für jeden Werth von α, 4 Werthe von z, und dann, weil

$$x=z+h=-\tfrac{1}{4}a+z \quad \text{ist},$$

auch 4 Werthe von x liefern.

Die Ausführung ist viel zu weitläufig, und die gefundene Endformel zu unbrauchbar, als daß hier mehr als die Möglichkeit der Auflösung gegeben werden sollte.

§. 187. Zusatz.

Da jeder Werth von α, für z 4 verschiedene Werthe liefert, so scheint z 24 Werthe haben zu können.

Weil aber $z^2+\alpha z+\beta$ selbst wieder in das Produkt

$$\left(z+\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}\right)\times\left(z+\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}\right);$$

und $z^2+\gamma z+\delta$ ebenfalls wieder in das Produkt

$$\left(z-\tfrac{1}{2}\alpha-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}\right)\times\left(z-\tfrac{1}{2}\alpha+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}\right)$$

zerlegt werden kann, so ist z^4+pz^2+qz+r das Produkt der 4 folgenden Faktoren

$$1)\quad z+\tfrac{1}{2}\alpha_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1{}^2-2p+\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$2)\quad z+\tfrac{1}{2}\alpha_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1{}^2-2p+\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$3)\quad z-\tfrac{1}{2}\alpha_1-\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1{}^2-2p-\frac{2q}{\alpha_1}}$$

$$4)\quad z-\tfrac{1}{2}\alpha_1+\tfrac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1{}^2-2p-\frac{2q}{\alpha_1}},$$

wenn α_1 einer der 6 Werthe von α ist. Multiplicirt man nun hier die Faktoren 1.) und 2.), 1.) und 3.), 1.) und 4.), 2.) und 3.), 2.) und 4.), zuletzt 3.) und 4.) mit einander, und dann jedesmal die beiden übrigen ebenfalls mit einander, so erhält man 6 Faktoren von der Form $z^2+\alpha z+\beta$ und 6 zugehörige von der Form $z^2+\gamma z+\delta$, so daß beide letztern mit einander multiplicirt, allemal wieder z^4+pz^2+qz+r geben müssen.

Diese 4 Faktoren 1.—4.) allein verursachen also, daß der Faktor $z^2+\alpha z+\beta$, 6 verschiedene Werthe, daß also α selbst 6 verschiedene Werthe hat. Und umgekehrt; da α nicht mehr als 6 verschiedene Werthe erhalten hat, aus der Gleichung 22.) des §. 186., und da jeder Faktor von der Form $z^2+\alpha z+\beta$ nur auf eine Art in zwei Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ sich zerlegen läßt, so folgt daraus, daß z^4+pz^2+qz+r in keine andern Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ zerfällt werden kann, als die 1.—4.) angegebenen, unter der Voraussetzung, daß in ihnen α_1 irgend einen einzigen der 6 Werthe von α vorstellt.

Wenn aber z^4+pz^2+qz+r sich nur auf eine einzige Art

in 4 Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ zerlegen läßt, so folgt ferner, daß jeder Werth von z, welcher diesen Ausdruck zu Null macht, einen der 4 Faktoren 1.–4.) zu Null machen müsse, daß also die Gleichung

$$z^4+pz^2+qz+r=0,$$

und dann auch die andere

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

nicht mehr als 4 verschiedene Auflösungen zulassen werde, mithin daß z die (§. 186.) gefundenen 4 Werthe habe, wenn in ihnen für α irgend ein einziger seiner 6 Werthe gesetzt wird; und daß die dort gefundenen Ausdrücke

$$z=-\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-\alpha^2-2p+\frac{2q}{\alpha}}$$

und $$z=+\tfrac{1}{2}\alpha\pm\sqrt{-\alpha^2-2p-\frac{2q}{\alpha}}$$

für jeden andern der 6 Werthe von α allemal dieselben 4 Werthe von z liefern, nur jedesmal in anderer Anordnung *).

---

*) Wenn α_1 einer der Werthe von α ist, so ist $-\alpha_1$ ein zweiter derselben, nach (§. 186.), und daß die 4 Werthe von z dieselben bleiben, man mag $+\alpha_1$ oder $-\alpha_1$ statt α setzen, fällt aus (25. und 26. des §. 186.) ohne Weiteres auch noch a posteriori in die Augen.

Multiplicirt man ferner je zwei der 4 Faktoren 1.–4. des §. 187. mit einander, so daß das Produkt jedesmal die Form z^2+Pz+Q bekommt, und setzt man P statt α in die Gleichung 22.) des §. 186.), so wird solche allemal identisch $0=0$. Mag man sich die Mühe geben, diese Rechnungen durchzuführen für die 6 Werthe, welche man nach und nach unter P zu verstehen hat, so hat man sich auch noch a posteriori überzeugt, daß die 6 Werthe von α aus 22.) des §. 186. keine andern einfachen Faktoren von der Form $z+\varepsilon$ geben können als die 1.–4. des §. 187., daß also die allgemeine biquadratische Gleichung vom vierten Grade nur 4 Auflösungen hat, die jedoch zum Theil oder alle auch einander gleich werden, und in dieser Hinsicht auch in eine geringere Anzahl verschiedener Werthe zusammenfallen können.

§. 188.

Auch erhellet noch Folgendes:

1) Die Gleichung (§. 186. N. 22.) gibt wenn a, b, c, d, also auch p, q und r reell sind, für α^2 (nach §. 181.) einen positiven Werth μ, also für α selbst zwei reelle Werthe, $+\sqrt{\mu}$ und $-\sqrt{\mu}$, wovon jedoch, wenn der eine statt α genommen wird, der andere statt des dortigen γ genommen werden muß, weil $\alpha+\gamma=0$ ist.

2) Es kann also

$$z^4+pz^2+qz+r$$

unter den 6 verschiedenen Arten, allemal auch in zwei Faktoren

$$z^2+\alpha z+\beta \quad \text{und} \quad z^2+\gamma z+\delta$$

zerlegt werden, in denen α, β, γ und δ reell sind.

3) Also sind von den 4 Werthen von x, welche

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$$

machen, und welche aus $x=-\frac{1}{4}a+z$ hervorgehen, während z aus

$$z^2+\alpha z+\beta=0, \quad \text{oder aus} \quad z^2+\gamma z+\delta=0$$

gefunden wird, entweder alle viere imaginär, oder nur zweie derselben imaginär; und jedes Paar dieser imaginären Werthe, kann immer auf die Form

$$P+Q\sqrt{-1}$$

und
$$P-Q\sqrt{-1}$$

gebracht werden, unter P und Q in beiden Ausdrücken dieselben reellen Werthe gedacht, so nämlich, daß wenn einer der imaginären Werthe von x, $=P+Q\sqrt{-1}$ gefunden worden ist, dann $P-Q\sqrt{-1}$ ein zweiter Werth von x sein muß.

§. 189. Aufgabe.

Es sind gegeben zwei Gleichungen der zweiten Ordnung

1) $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$

und 2) $a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0$,

welche auch so geschrieben werden können

3) $a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,)=0$

und 4) $a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1)=0$,

oder auch so

5) $a\,y^2+P\,y+Q\,=0$,

6) $a_1y^2+P_1y+Q_1=0$;

wenn 7) $bx+d$ durch P, b_1x+d_1 durch P_1,

und 8) cx^2+ex+f durch Q, $c_1x^2+e_1x+f_1$ durch Q_1

vorgestellt wird. Man soll solche nach x und nach y auflösen.

Auflösung. Man finde aus (1. oder 5.)

9) $$y=\frac{-P\pm\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}.$$

Dieser Ausdruck statt y gesetzt, macht nun die Gleichung 1.) oder 5.) identisch, die 2.) oder 6.) dagegen übergehen in

10) $$a_1\frac{[-P\pm\sqrt{P^2-4aQ}]^2}{4a^2}+P_1\frac{-P\pm\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}+Q_1=0,$$

oder, wenn man bemerkt, daß nach (§. 145. Lehrs. 1.):

$$[-P\pm\sqrt{P^2-4aQ}]^2=2(P^2-2aQ)\mp2P\sqrt{P^2-4aQ}$$

ist, und wenn man mit $2a^2$ wegmultiplicirt,

11) $$a_1(P^2-2aQ)-aPP_1+2a^2Q_1\pm(aP_1-a_1P)\sqrt{P^2-4aQ}=0,$$

welche Gleichung nun noch durch dazugehörige Werthe von x identisch gemacht werden muß. — Um aber diese Gleichung nach x zu ordnen, muß man vor allen Dingen $\sqrt{P^2-4aQ}$ fortschaffen, zu dem Ende das damit versehene Glied ganz allein auf die andere Seite bringen und dann auf beiden Seiten die Quadrate nehmen. Dies gibt

12) $$[a_1(P^2-2aQ)-aPP_1+2a^2Q_1]^2=(aP_1-a_1P)^2(P^2-4aQ);$$

und diese Gleichung vollends nach x geordnet, wird:

$$13)\quad [(a_1c-ac_1)^2-(a_1b-ab_1)(b_1c-bc_1)]x^4$$
$$+[2(a_1c-ac_1)(a_1e-ae_1)-(a_1d-ad_1)(b_1c-bc_1)$$
$$-(a_1b-ab_1)(b_1e-be_1+cd_1-c_1d)]x^3$$
$$+[(a_1e-ae_1)^2+2(a_1c-ac_1)(a_1f-af_1)$$
$$-(a_1d-ad_1)(b_1e-be_1+cd_1-c_1d)$$
$$-(a_1b-ab_1)(b_1f-bf_1+d_1e-de_1)]x^2$$
$$+[2(a_1e-ae_1)(a_1f-af_1)-(a_1d-ad_1)(b_1f-bf_1+d_1e-de_1)$$
$$-(a_1b-ab_1)(d_1f-df_1)]x$$
$$+[(a_1f-af_1)^2-(a_1d-ad_1)(d_1f-df_1)]=0,$$

welche, wie man sieht, vom 4ten Grade ist, also nach (§. 186.) ihre Auflösung findet und für x, vier Werthe liefert.

Hat man aber die 4 Werthe von x gefunden, welche die Gleichung 13.) identisch machen, so setze man jeden dieser Werthe von x in die 9.) statt x, und findet dazu aus 9.) jedesmal zwei Werthe vou y; und es entsteht nun die Frage, welcher dieser beiden Werthe von y ist der zu diesem x gehörige wahre Werth? — Offenbar allemal derjenige, welcher für denselben Werth von x, nicht bloß die 1.), sondern auch die 2.) identisch macht, weil gerade unsere Aufgabe verlangt, daß die 1.) und 2.) zugleich identisch werden sollen. Man wird also jeden der Werthe von x, wie sie sich aus 13.) ergeben, nicht bloß in 3.) oder 1.) setzen, sondern auch in 2.), und denjenigen Werth von y dazu suchen, welcher für diesen Werth von x, die Gleichungen 1.) und 2.) oder 5.) und 6.) zugleich identisch macht.

Diesen Werth von y kann man aber auf verschiedenen Wegen finden. Man kann z. B. jede der Gleichungen 1.) und 2.) oder 5.) und 6.), nachdem der Werth von x in beiden statt x, gesetzt worden ist, nach y auflösen; erhält aus jeder für y, zwei Werthe; und man nimmt dann den, beiden gemeinschaftlichen Werth von y für den wahren. —

Man kann aber auch, nachdem in den Gleichungen 1.) und 2.) oder 5.) und 6.) derselbe aus 13.) gefundene Werth von x statt x gesetzt worden ist, aus diesen Gleichungen 5.) und 6.) nämlich aus

5) $ay^2+Py+Q=0$ und 6) $a_1y^2+P_1y+Q_1=0$, y als denselben (beiden Gleichungen gemeinschaftlichen) Werth ansehend, y^2 eliminiren, und die Eliminationsgleichung

$$(a_1P-aP_1)y+(a_1Q-aQ_1)=0,$$

die nur noch nach y vom ersten Grade ist, vollends nach y auflösen, so wird man gerade den Werth von y erhalten, der beiden Gleichungen gemeinschaftlich ist.

Endlich kann man sich auch

$$ay^2+Py+Q \quad \text{und} \quad a_1y^2+P_1y+Q_1$$

in ihre beiden Faktoren zerlegt denken, den erstern in $a(y-\alpha)(y-\beta)$ den andern in $a_1(y-\alpha)(y-\delta)$, und den gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$, $=0$ nehmen, weil dies den Werth von y gibt, welcher beide Gleichungen 5.) und 6.) auf einmal zu Null macht*). — Diesen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ kann man aber, wie später im zweiten Theile dieses Lehrbuches gezeigt wird, direkt finden, ohne die vorhin besprochene Zerlegung in Faktoren wirklich vornehmen zu müssen.

Anmerkung. Unter den 4 Werthen von x, welche aus 13.) des (§. 189.) erhalten werden, sind zweie, welche die Gleichung 11.) des (§. 189.) dann identisch machen, wenn man $+\sqrt{P^2-4aQ}$ nimmt; zu jedem dieser Werthe von x gehört der Werth $y=\frac{-P+\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}$; und die beiden andern aus 13.) erhaltenen Werthe von x, machen die 11.) nur dann identisch,

---

*) Da man in der Auflösung den aus 1.) für y gefundenen Ausdruck in x, statt y in 2.) gesetzt hat, so hat man gerade dadurch vorausgesetzt, daß beide Gleichungen 1.) und 2.) für jeden aus 13.) gefundenen Werth von x, einen und denselben Werth von y haben müssen; daß daher beide Ausdrücke

$$y^2+\frac{P}{a}y+\frac{Q}{a} \quad \text{und} \quad y^2+\frac{P_1}{a_1}y+\frac{Q_1}{a_1},$$

auch nothwendig einen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ haben.

wenn man $-\sqrt{P^2-4aQ}$ nimmt; zu diesem Werthe von x gehört dann der Werth $y=\frac{-P-\sqrt{P^2-4aQ}}{2a}$.

§. 190.

Auch bei der Auflösung des (§. 189.) kam alles wieder zunächst darauf an, den Unbekannten y aus beiden Gleichungen

$$1)\quad a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f\ =0$$

und

$$2)\quad a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0$$

zu eliminiren oder wegzuschaffen. Dort (§. 189.) wurde die Substitutions-Methode angewandt. Wollte man die Kombinations-Methode versuchen, y aus beiden Gleichungen 1.) und 2.) finden, und die Werthe einander gleich setzen, so bekam man eine Gleichung von der Form

$$3)\quad \frac{A\pm\sqrt{B}}{2a}=\frac{A_1\pm\sqrt{B_1}}{2a_1}$$

als Eliminationsgleichung, wo

$$\left.\begin{array}{l}A\\B\\A_1\\B_1\end{array}\right\}\text{die Ausdrücke}\left\{\begin{array}{l}-(bx+d),\\(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+(d^2-4af),\\-(b_1x+d_1),\\(b_1{}^2-4a_1c_1)x^2+2(b_1d_1-2a_1e_1)x+(d_1{}^2-4a_1f_1),\end{array}\right.$$

vorstellen. Dann aber mußten beide Wurzeln $\sqrt{B}$ und $\sqrt{B_1}$ herausgebracht werden, wenn die Eliminationsgleichung selbst als eine nach x geordnete erscheinen sollte. Dies Wegschaffen der Wurzeln konnte nun ungefähr so bewerkstelligt werden. Erstlich bringt man die Gleichung 3.) auf die Form

$$2a_1A-2aA_1=\pm2a\sqrt{B_1}\mp2a_1\sqrt{B},$$

und nimmt auf beiden Seiten die Quadrate; so erhält man

$$(2a_1A-2aA_1)^2=(4a^2B_1+4a_1{}^2B)\pm8aa_1\sqrt{B\cdot B_1}$$

oder, wenn man das Glied mit der Wurzel allein stellt,

$$(2a_1A-2aA_1)^2-(4a^2B_1+4a_1{}^2B)=\pm8aa_1\sqrt{B\cdot B_1}.$$

Nimmt man nun hier wieder auf beiden Seiten die Quadrate, so fällt auch diese Wurzel zur Rechten noch weg, und man hat

$$[(2a_1A-2aA_1)^2-(4a^2B_1+4a_1{}^2B)]^2 = 64a^2\cdot a_1{}^2\cdot B\cdot B_1,$$

welches wiederum, wenn man wirklich quadrirt und für A und B und A_1 und B_1 die durch sie bezeichneten Ausdrücke in x setzt, auch die entstehende Gleichung vollends nach x ordnet, zu der Gleichung 13.) des (§. 189.) führt.

§. 191.

Wollte man aber, um aus den beiden Gleichungen

$$1)\quad a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f\;=0$$

$$2)\quad a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0$$

den Unbekannten y zu eliminiren, die englische Methode anwenden, so müßte man aus beiden zuerst y^2 eliminiren, indem die erstere mit a_1, die zweite mit a multiplicirt, und dann die beiden neuen Gleichungen von einander subtrahirt würden. Man wird jedoch am besten thun die Gleichungen 1.) und 2.) selbst vorher so zu schreiben

$$1)\quad a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,)=0$$

$$2)\quad a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1)=0;$$

und die neue Gleichung wird nun werden

$$3)\quad [(a_1b-ab_1)x+(a_1d-ad_1)]y \\ +[(a_1c-ac_1)x^2+(a_1e-ae_1)x+(a_1f-af_1)]=0.$$

Und nun eliminirt man y aus 3.) und 1.) oder aus 3.) und 2.), wie solches für diesen Fall bereits gezeigt worden ist; und man erhält dieselbe Eliminationsgleichung 13.) des (§. 189.).

Anmerkung. Man könnte auch, nachdem man durch Elimination von y^2 die Gleichung 3.) erhalten hat, aus beiden Gleichungen 1.) und 2.) noch das Glied eliminiren, welches y gar nicht enthält; zu dem Ende die erste Gleichung mit $c_1x^2+e_1x+f_1$, die andere dagegen mit cx^2+ex+f multi-

pliciren und dann die entstehenden Gleichungen von einander subtrahiren, endlich das Resultat durch y wegdividiren; und man erhielte:

$$4)\quad [(ac_1-a_1c)x^2+(ae_1-a_1e)x+(af_1-a_1f)]y$$
$$+[(bc_1-b_1c)x^3+(be_1-b_1e+c_1d-cd_1)x^2+(bf_1-b_1f$$
$$+de_1-d_1e)x+(df_1-d_1f)]=0.$$

Die Gleichungen 3.) und 4.) sind nun beide, nach y, einfache Gleichungen und y sogleich daraus zu eliminiren. Immer erhält man dieselbe Eliminationsgleichung 13.) (§. 189.) vom 4ten Grade nach x.

§. 192.

Wollte man zur Elimination des y aus den Gleichungen

$$1)\quad a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f\;=0$$
$$2)\quad a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1=0$$

sich der französischen Methode bedienen, so könnte man dies auf nachstehende Art bewerkstelligen:

Man schreibe die gegebenen Gleichungen zuerst so:

$$3)\quad a\,y^2+(b\,x+d\,)y+(c\,x^2+e\,x+f\,)=0$$
$$4)\quad a_1y^2+(b_1x+d_1)y+(c_1x^2+e_1x+f_1)=0;$$

multiplicire dann die erste mit $\mu y+\nu$, die andere mit $\mu_1 y+\nu_1$, addire beide Resultate, und setze in dieser neuen Gleichung die Koeffizienten von y^3, y^2 und y der Null gleich, so wird man μ oder μ_1 beliebig annehmen können (ohne x); μ_1 oder μ, so wie ν_1 und ν (letztere beiden in x) werden sich dem gemäß bestimmen lassen, und die nun übrige Gleichung ist die gesuchte Eliminationsgleichung. — Man erhält aber auf diesem Wege zunächst:

$$5)\quad (\mu a+\mu_1a_1)y^3+[\mu(bx+d)+\nu a+\mu_1(b_1x+d_1)+\nu_1a_1]y^2$$
$$+[\mu(cx^2+ex+f)+\nu(bx+d)+\mu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)$$
$$+\nu_1(b_1x+d_1)]y$$
$$+\nu(cx^2+ex+f)+\nu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)=0.$$

Setzt man also nun

6) $\mu a + \mu_1 a_1 = 0$

7) $\mu(bx+d)+\nu a+\mu_1(b_1x+d_1)+\nu_1 a_1 = 0$

8) $\mu(cx^2+ex+f)+\nu(bx+d)+\mu_1(c_1x^2+e_1x+f_1)$
$+\nu_1(b_1x+d_1) = 0,$

so kann man $\mu = a_1$ *) nehmen, und dann ist $\mu_1 = -a$, und ν und ν_1 sind bestimmt durch die Gleichungen

9) $a\nu+a_1\nu_1+[(a_1b-ab_1)x+(a_1d-ad_1)] = 0$

und

10) $(bx+d)\nu+(b_1x+d_1)\nu_1+[(a_1c-ac_1)x^2+(a_1e-ae_1)x$
$+(a_1f-af_1)] = 0,$

welche nach ν und ν_1, aufgelöst werden können.

Und setzt man zuletzt diese Werthe von ν und ν_1 in 5.) d. h. wegen 6.—9.), in

$$\nu\cdot(cx^2+ex+f)+\nu_1\cdot(c_1x^2+e_1x+f_1) = 0,$$

so hat man die gesuchte Eliminationsgleichung, welche wiederum die Gleichung 13.) des (§. 189.) ist.

§. 193.

Es gibt aber noch eine Art des Eliminirens, welche bei höhern, und also auch bei den hier vorliegenden Gleichungen der zweiten Ordnung mit Vortheil angewandt wird. — Denkt man sich nämlich die beiden gegebenen Gleichungen

$$a\,y^2+b\,xy+c\,x^2+d\,y+e\,x+f = 0$$

und $$a_1y^2+b_1xy+c_1x^2+d_1y+e_1x+f_1 = 0$$

---

*) Man hat zur Bestimmung der 4 unbestimmten μ, μ_1, ν, ν_1 nur 3 Gleichungen, so daß μ oder μ_1 unbestimmt bleibt und beliebig genommen werden kann. Man kann also eben so gut auch $\mu = 1$ nehmen, so daß dann $\mu_1 = -\frac{a}{a_1}$ wird. Um aber die Bruchformen möglichst zu vermeiden, hat man oben $\mu = a_1$ genommen, wo dann $\mu_1 = -a$ wird.

so geschrieben:

$$1)\quad y^2+\frac{bx+d}{a}y+\frac{cx^2+ex+f}{a}=0$$

oder $y^2+Py+Q=0$

und

$$2)\quad y^2+\frac{b_1x+d_1}{a_1}y+\frac{c_1x^2+e_1x+f_1}{a_1}=0$$

oder $y^2+P_1y+Q_1=0$,

und denkt man sich unter x bereits irgend einen seiner Werthe vorgestellt, so müssen die Ausdrücke y^2+Py+Q und $y^2+P_1y+Q_1$ einen gemeinschaftlichen Faktor $y-\alpha$ haben. — Sucht man daher die Werthe von x, oder die Gleichung in x, welche stattfinden muß, damit für y^2+Py+Q und $y^2+P_1y+Q_1$ ein solcher gemeinschaftlicher Faktor $y-\alpha$ existire, so wird dies abermals die gesuchte Eliminationsgleichung liefern. — Die Ausführung dieses Verfahrens folgt im zweiten Theil.

Beispiel 1. Aus 1) $xy=p$ und 2) $x^2+y^2=q$, x und y zu finden.

Aus 1.) folgt 3) $y=\frac{p}{x}$, und das macht die 2.) übergehen in

$$4)\quad x^2+\frac{p^2}{x^2}=q \quad \text{oder} \quad (x^2)^2-q(x^2)+p^2=0,$$

welche

$$5)\quad x=\sqrt{+\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}$$

und

$$6)\quad y=\frac{p}{x}=\frac{p}{\sqrt{\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}}$$ gibt.

In diesem Werth von y kann man auch Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}}$$

multipliciren, und man erhält dann

$$7)\quad y=\sqrt{\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-p^2}};$$

aber dann muß man unter diesen 4 Werthen von y allemal erst denjenigen herausheben, welcher zu dem für x genommenen paßt.

Weil aber $x^2+y^2=q$ werden muß, so müssen die obern oder die untern (+ oder −) Zeichen in 5.) und 7.) zugleich genommen werden. Und weil auch $xy=p$ werden muß, so hat man von den beiden Werthen der äußern Wurzel in 5.) und 7.) jedesmal die beiden mit einerlei (+ oder −) Zeichen versehenen Werthe zu nehmen, wenn p positiv, dagegen die beiden mit verschiedenen (+ oder −) Zeichen versehenen, wenn p negativ ist.

Beispiel 2. Die Gleichungen

1) $x^2-y^2=d$ und 2) $xy=p$, nach x und nach y aufzulösen.

Man findet aus 2.)

$$3)\quad y=\frac{p}{x};$$

und dies in 1.) substituirt, gibt:

$$4)\quad x^2-\frac{p^2}{x^2}=d,$$

also

$$5)\quad x=\sqrt{\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}$$

und

$$6)\quad y=\frac{p}{x}=\frac{p}{\sqrt{\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit

$$\sqrt{-\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}}\quad\text{multiplicirt:}$$

$$7)\quad y=\sqrt{-\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p^2}},$$

wo wieder in 5.) und 7.) die obern (+ oder −) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich genommen werden müssen, weil $x^2-y^2=d$ werden muß; wo aber wieder von den äußern Wurzeln, die beiden mit einerlei (+ oder −) Zeichen versehenen Werthe genommen werden müssen, wenn p positiv, dagegen die mit verschiedenen (+ oder −) Zeichen versehenen, wenn p negativ ist, weil $xy=p$ werden muß.

Beispiel 3. Aus

$$1)\ x^2+y^2=a \quad \text{und} \quad 2)\ x^2-y^2=b$$

folgt $x=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b)}$ und $y=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(a-b)}$.

Beispiel 4. Aus

$$1)\ x^2-y^2=d \quad \text{und} \quad 2)\ (x+y+a)^2+(x-y+a)^2=b,$$

folgt $x=-\tfrac{1}{2}a\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2d+b-a^2}$

$$y=\sqrt{\tfrac{1}{4}b-\tfrac{1}{2}d\mp\tfrac{1}{2}a\sqrt{2d+b-a^2}},$$

wo zu jedem Werth von x, zwei Werthe von y gehören, nämlich die beiden der äußern Wurzel, während die obern (+ oder −) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich stattfinden.

Beispiel 5. Aus

$$1)\ \frac{18x}{y}=\frac{8y}{x} \quad \text{und} \quad 2)\ 3xy+2x+y=485,$$

folgt $x=10,\ y=15;\ x=-10\tfrac{7}{9},\ y=-16\tfrac{1}{6};$

$$x=\frac{1+\sqrt{-34919}}{18},\ y=\frac{-1-\sqrt{-34919}}{12}$$

und $$x=\frac{1-\sqrt{-34919}}{18},\ y=\frac{-1+\sqrt{-34919}}{12}.$$

Beispiel 6. Aus

$$1)\ \frac{ax}{y}=b\frac{y}{x} \quad \text{und} \quad 2)\ cxy+dx+ey=h$$

folgt
$$\begin{cases} x=\dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}} \\ y=\dfrac{-(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}+d\sqrt{b})^2+4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}, \end{cases}$$

oder
$$\begin{cases} x=\dfrac{-(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})\pm\sqrt{(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2-4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{a}} \\ y=\dfrac{+(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})\mp\sqrt{(e\sqrt{a}-d\sqrt{b})^2-4ch\sqrt{ab}}}{2c\sqrt{b}}, \end{cases}$$

wo in den zusammengehörigen Werthen von x und y immer die obern (+ oder —) Zeichen zugleich, oder die untern zugleich genommen werden müssen.

Beispiel 7. Aus

1) $x+y+x^2+y^2=a$

2) $x-y+x^2-y^2=b$,

folgt

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2b+1}$$

$$y=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-2b+1},$$

oder

$$x=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2a+2b+1}$$

$$y=-\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2a-2b+1}.$$

Beispiel 8. Aus

1) $x+y=xy$ und 2) $x+y+x^2+y^2=a$

folgt

$$x=\frac{1+\sqrt{4a+1}\pm\sqrt{4a-6-6\sqrt{4a+1}}}{4}$$

$$y=\frac{1+\sqrt{4a+1}\mp\sqrt{4a-6-6\sqrt{4a+1}}}{4},$$

wo die obern (+ oder —) zugleich oder die untern zugleich gelten, und wo einmal durchaus $+\sqrt{4a+1}$, ein andermal aber durchaus $-\sqrt{4a+1}$ statt $\sqrt{4a+1}$ gesetzt werden muß.

§. 194.

Sind n Gleichungen gegeben zwischen n Unbekannten, unter denen

1) entweder eine einzige von der 4ten Ordnung, die übrigen alle aber von der 1ten Ordnung sind, oder

2) zweie von der 2ten Ordnung, die übrigen alle von der 1ten Ordnung sind,

so ist man durch das vorhergegangene hinlänglich in den Stand gesetzt, diese Gleichungen nach ihren Unbekannten aufzulösen.

Man wird nach gehöriger Elimination aller übrigen Unbekannten, zu einer Gleichung vom 4ten Grade mit einem einzigen der Unbekannten gelangen, für diesen Unbekannten also 4 Werthe erhalten; dann aber zu jedem dieser 4 Werthe jedesmal einen einzigen Werth der übrigen Unbekannten finden.

Der Kürze wegen mag dieses nur durch einige Beispiele erläutert werden.

Beispiel 1. Aus

$$1)\ x^2+y^2+z^2=a,\quad 2)\ y^2=2xz+b,\quad 3)\ cx=dz$$

folgt

$$x=\frac{d\sqrt{a-b}}{c+d},\quad y=\frac{\sqrt{2acd+b(c^2+d^2)}}{c+d},$$

und $$z=\frac{c\sqrt{a-b}}{c+d},$$

wo $\sqrt{a-b}$ durchaus bald ihren (+), bald ihren (−) Werth, aber jedesmal einen und denselben vorstellt, während zu jedem Werthe von $\sqrt{a-b}$, für y der (+) und auch der (−) Werth seiner Wurzel genommen werden kann, so daß 4 Parthien (Systeme) zusammengehöriger Werthe von x, y und z sich ergeben.

Beispiel 2. Aus

$$1)\ x+y+z=6,\quad 2)\ x-y+z=2,\quad 3)\ x^4+y^4+z^4=98$$

folgt

$$x=1,\ 3,\ 2+5\sqrt{-1},\ 2-5\sqrt{-1},$$
$$y=2,\ 2,\ 2,\ 2,$$
$$z=3,\ 1,\ 2-5\sqrt{-1},\ 2+5\sqrt{-1}.$$

Zweite Abtheilung.

Von den ganzen Funktionen vom vierten Grade noch in's Besondere.

§. 195. Lehrsätze und Folgerungen.

1) Ist α einer der Werthe, welche den Ausdruck

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

zu Null machen, so läßt sich dieser Ausdruck allemal in zwei Faktoren zerlegen, von denen der eine $(x-\alpha)$ ist, der andere dagegen die Form $x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ hat.

2) Und weil letzterer Ausdruck sich jedesmal wieder in 3 Faktoren von der Form

$$x-\alpha_1, \quad x-\alpha_2 \quad \text{und} \quad x-\alpha_3$$

zerlegen läßt, so kann auch allemal

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=(x-\alpha)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$$

gemacht werden.

3) Man zerlegt demnach den Ausdruck

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$$

in seine 4 Faktoren von vorstehender Form, wenn man die 4 Werthe α, α_1, α_2, α_3, von x sucht, welche ihn zu Null machen, und dann

$$x-\alpha, \quad x-\alpha_1, \quad x-\alpha_2, \quad x-\alpha_3$$

als die gesuchten Faktoren nimmt.

4) Es kann $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ nur auf eine einzige Art in die 4 Faktoren von vorstehender Form zerlegt werden*).

---

*) Weil von den 4 Faktoren $x-\alpha$, $x-\alpha_1$, $x-\alpha_2$, $x-\alpha_3$, je zwei derselben mit einander multiplicirt, ein Produkt von der Form

$$x^2+px+q$$

geben, so kann $x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D$ auf 6 Arten in ein Produkt zweier doppelten Faktoren von der Form x^2+px+q zerlegt werden, die sich jedoch auf nur 3 wesentlich von einander verschiedene Produkte zurückführen.

5) Sind α, β, γ, δ die 4 Werthe von x, welche

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D, =0$$

machen, so ist allemal

$$A=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta),$$
$$B=+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta),$$
$$C=-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta),$$
$$D=+\alpha\beta\gamma\delta;$$

d. h. der erste Koeffizient A ist die Summe aller 4 Werthe, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen; der andere B ist die Summe der Produkte je zweier dieser 4 Werthe; der dritte ist wieder die Summe der Produkte zu je dreien der 4 Werthe, mit dem entgegengesetzten Zeichen genommen, während D das Produkt aller 4 Werthe ist, mit dem eigenen Zeichen.

6) Sind daher 4 Unbekannte α, β, γ und δ durch die symetrischen Gleichungen

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=a,$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=b,$$
$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=c,$$
$$\alpha\beta\gamma\delta=d,$$

gegeben, so darf man nur die 4 Werthe von z suchen, welche der Gleichung vom 4ten Grade

$$z^4-az^3+bz^2-cz+d=0,$$

genügen, und solche statt α, β, γ und δ nehmen.

7) Hat man für eine biquadratische Gleichung

$$1)\quad x^4+nx^3+px^2+qx+r=0,$$

einen der Werthe von x nämlich $x=\alpha$ gefunden, welche sie identisch machen, so dividire man durch $x-\alpha$ den Ausdruck

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r,$$

um den andern Faktor

$$x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$$

zu erhalten, und die Gleichung

$$2)\quad x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$$

nach x aufgelöst, liefert dann die 3 übrigen, der 1.) entsprechenden Werthe von x. — Und hat man wieder einen Werth α_1 von x, welcher der Gleichung 2.) genügt, so dividire man noch mit $x-\alpha_1$ in $x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, um den andern Faktor

$$x^2+\beta_1 x+\gamma_1$$

zu erhalten; und die Gleichung

$$3)\quad x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$$

gibt dann, nach (§. 139.) aufgelöst, die beiden letzten, der 1.) und der 2.) entsprechenden Werthe von x.

Die Beweise dieser Sätze ergeben sich genau wie die der analogen Sätze der (§§. 169–172 und 146–149.).

§. 196. Lehrsatz.

Der Ausdruck

$$1)\quad Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

läßt sich mit einer einzigen Ausnahme immer auf die Form

$$2)\quad A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta \quad \text{bringen.}$$

Beweis. Denn vergleicht man beide Ausdrücke 1.) und 2.) nach (§. 121.), so erhält man die 4 Gleichungen

$$1)\quad 4A\alpha=B; \qquad 2)\quad 6A\alpha^2+\beta=C;$$

$$3)\quad 4A\alpha^3+2\beta\gamma=D; \qquad 4)\quad A\alpha^4+\beta\gamma^2+\delta=E;$$

und daraus findet sich

$$\alpha=\frac{B}{4A}, \qquad \beta=C-\frac{3B^2}{8A}=\frac{8AC-3B^2}{8A},$$

$$\gamma=\frac{4AD-\dfrac{B^3}{4A}}{8AC-3B^2} \quad \text{und} \quad \delta=E-\frac{B^4}{256A^3}-\frac{(16A^2D-B^3)^2}{128A^3(8AC-3B^2)},$$

so daß also der Lehrsatz richtig ist, den einzigen Fall abgerechnet,

wo der Divisor $8AC-3B^2$ Null würde, und wo $\beta=0$ wäre, γ unbestimmt bliebe, während $16A^2D-B^3$ ebenfalls $=0$ sein müßte, wenn die Gleichung 3.) keinen Widerspruch enthalten, und δ noch so bestimmt werden sollte, daß nun doch noch die Form

$$A(x+\alpha)^4+0\cdot(x+\gamma)^2+\delta$$

d. h. $$A(x+\alpha)^4+\delta$$

gerettet wäre.

Anmerkung. Ist also $8AC-3B^2=0$ und nicht zugleich $16A^2D-B^3=0$, so ist die Umwandlung des (§. 196.) nicht möglich. In allen andern Fällen aber ist sie möglich.

§. 197.

Sind A, B, C, D, E reell, so sind auch die bei dieser Umwandlung bestimmten α, β, γ und δ reell; also $(x+\alpha)^4$ und $(x+\gamma)^2$ für jeden reellen Werth von x allemal positiv.

1) Sind also

A, β und δ zugleich positiv,

so ist $$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

für jeden reellen Werth von x allemal positiv, nie negativ und nie Null.

2) Sind

A, β und δ

zugleich negativ, so ist der Ausdruck

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

für jeden reellen Werth von x, allemal negativ, nie Null und nie positiv.

Denn es erhellet die Richtigkeit der Behauptungen aus der bloßen Ansicht der Umformung

$$A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta.$$

Anmerkung. Dagegen würde man sich sehr irren, wenn man umgekehrt behaupten wollte, daß A, β, δ, jedesmal alle zugleich positiv oder alle zugleich negativ sein müssen, wenn der Ausdruck

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$$

d. h. $$A(x+\alpha)^4+\beta(x+\gamma)^2+\delta$$

für jeden reellen Werth von x, durchaus positiv, oder durchaus negativ werden soll; obgleich wohl behauptet werden könnte, daß A im erstern Falle nothwendig positiv und im andern Falle nothwendig negativ sein müsse.

§. 198. Aufgabe.

Unter der Voraussetzung, daß n, p, q, r beliebig reell sind, soll man den Gang der reellen Werthe des hier durch f_x bezeichneten Ausdrucks

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

nachweisen, für den Fall, daß statt x nach und nach alle stetig neben einander liegenden, von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin abnehmenden reellen Werthe von x, gesetzt gedacht werden.

Auflösung I. Genau unter den Voraussetzungen der (§§. 157., 158. und 176.), nämlich wenn h positiv, aber im Moment des Verschwindens gedacht ist, sind

$$\alpha+h, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \alpha-h$$

drei abnehmende und stetig auf einander folgende Werthe von x, und

$$f_{\alpha+h}, \qquad f_\alpha, \qquad \text{so wie} \qquad f_{\alpha-h}$$

stellen die 3 zugehörigen Werthe von f_x d. h. von

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

vor. Und hat man sogleich:

$$f_{\alpha\pm h}=(\alpha\pm h)^4+n(\alpha\pm h)^3+p(\alpha\pm h)^2+q(\alpha\pm h)+r$$
$$=(\alpha^4+n\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r)$$
$$\pm(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h$$
$$+(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2$$
$$\pm(4\alpha+n)h^3+h^4;$$

also

1) $$f_{\alpha+h}-f_\alpha=(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h+(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2+(4\alpha+n)h^3+h^4$$
$$=[(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)+((6\alpha^2+3n\alpha+p)+[(4\alpha+n)+h]h)h]h.$$

2) $$f_\alpha-f_{\alpha-h}=(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)h-(6\alpha^2+3n\alpha+p)h^2+(4\alpha+n)h^3-h^4$$
$$=[(4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q)-((6\alpha^2+3n\alpha+p)-[(4\alpha+n)-h]h)h]h.$$

II. Nun ist $f_x=+\infty$, sowohl, wenn $x=+\infty$, als auch wenn $x=-\infty$ gesetzt wird. (Vgl. §. 176. II. und den dortigen Beweis, der hier leicht wiederholt werden kann).

III. Ferner ändern sich die Werthe von f_x mit denen von x stetig; weil der Unterschied $f_{\alpha+h}-f_\alpha$ oder $f_\alpha-f_{\alpha-h}$, mit h multiplicirt erscheint, also mit h selbst im Moment des Verschwindens ist, d. h. kleiner ist, als jede noch so klein gedachte bestimmte Zahl. (Vgl. §. 176. III. und §. 158.).

IV. So lange der Koeffizient von h, nämlich

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q$$

positiv ist, so lange nimmt f_x mit x zugleich fortwährend ab; so lange aber dieser Koeffizient $4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q$ negativ ist, so lange wächst f_x, während x abnimmt. (Vgl. §. 176. IV.).

V_1. Ist aber

1) $$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

und zugleich auch der Koeffizient von h^2 nämlich

2) $$6\alpha^2+3n\alpha+p=0,$$

(welches jedoch nur in Ausnahmsfällen so werden kann, weil, wenn man α aus 1.) und 2.) eliminirt, sich eine Gleichung zwischen den gegebenen Koeffizienten n, p, q, r selbst ergibt, und welches namentlich nach (§. 180.) voraussetzt, daß zwei der 3 aus 1.) sich ergebenden Werthe von α reell und einander gleich sind), so nimmt f_x noch immer mit x zugleich ab, wenn der Koeffizient von h^3, d. h. $4\alpha+n$ positiv, dagegen wächst f_x noch ununterbrochen, wenn dieser Koeffizient $4\alpha+n$ negativ sein sollte (während x jedesmal stetig abnehmend gedacht wird).

V₂. Ist dagegen

$$1)\quad 4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

und

$$2)\quad 6\alpha^2+3n\alpha+p=0$$

und noch

$$3)\quad 4\alpha+n=0,$$

(welches noch seltener der Fall sein kann, weil diese 3 Gleichungen, wenn man α eliminirt, zu zwei Bedingungs-Gleichungen zwischen den Koeffizienten n, p, q, r, selbst führen und welches namentlich nach (§. 180. Anmerk.) voraussetzt, daß alle 3 Werthe von α aus I.) einander gleich und $=-\frac{1}{4}n$ sind), so ist

$$f_{\alpha+h}-f_\alpha = h^4,$$

also positiv, und

$$f_\alpha-f_{\alpha-h} = -h^4,$$

also negativ; demnach f_α kleiner als jeder der beiden nächsten Nachbarwerthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, d. h. ein Kleinstes (ein Minimum); und dieser Werth von α für x, macht einen Scheidepunkt in der Reihe der reellen Werthe von f_x, die von f_α an, nachdem sie abgenommen haben, jetzt wieder zunehmen.

VI. Ist der Koeffizient von h, der Null gleich, d. h. ist

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0,$$

und dabei nicht noch $6\alpha^2+3n\alpha+p$ der Null gleich (und es läßt sich allemal ein solcher reeller Werth von α finden, oder gar dreie derselben, wie auch n, p, q, r reell gegeben sein mögen nach (§. 177.), so ist wiederum f_α kleiner als seine beiden nächsten Nachbarwerthe $f_{\alpha+h}$ und $f_{\alpha-h}$, oder größer als beide,

also ein Kleinstes (ein Minimum) oder ein Größtes (ein Maximum), je nachdem für dieselben Werthe von α, der Koeffizient von h^2 in (I. 1. 2.), nämlich

$$6\alpha^2+3n\alpha+p$$

für denselben Werth von α positiv oder negativ ist. In jedem Falle ist also dasmal der Werth f_α ein Scheidepunkt in der Reihe der reellen Werthe von f_x, und zwar ein Scheidepunkt im Abnehmen, wenn $6\alpha^2+3n\alpha+p$ positiv ist, dagegen ein Scheidepunkt im Zunehmen (so daß von da ab die Werthe von f_x wieder abnehmen), wenn $6\alpha^2+3n\alpha+p$ negativ ist, für den Werth, oder für die Werthe von α, welche, wie hier vorausgesetzt worden ist,

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

machen. (Vgl. §. 176. VI.).

VII. Solcher Scheidepunkte hat also der Ausdruck

$$f_x \quad \text{oder} \quad x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

für gewisse Werthe seiner Koeffizienten n, p, q, r dreie (die durch α_1, α_2 und α_3 bezeichnet sein können, so daß α_1 der größeste, α_3 der kleinste derselben ist) nach (§. 178.), wenn

1) $(\frac{3}{4}n)^2-3(\frac{1}{2}p)$ d. h. $\frac{9}{16}n^2-\frac{3}{2}p$

positiv und zugleich

2) $4[(\frac{3}{4}n)^2-3(\frac{1}{2}p)]^3>[2(\frac{3}{4}n)^3-9(\frac{3}{4}n)(\frac{1}{2}p)+27(\frac{1}{4}q)]^2$

ist; dagegen hat f_x nur einen einzigen solchen Scheidepunkt, wenn eine dieser beiden Bedingungen nicht stattfindet. (Vergl. §. 176. VII.).

VIII. Es gehen also die Werthe von f_x, während x von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin stetig abnimmt, von $+\infty$ anfangend, abnehmend fort und kehren zuletzt zu $+\infty$ zurück (nach II.). Dazwischen liegt nun entweder nur ein einziger Scheidepunkt oder es liegen deren dreie dazwischen, für $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$ und $x=\alpha_3$ (nach VII.).

§. 199.

1) Liegt nur ein Scheidepunkt dazwischen etwa für $x = \beta$, so gehen die Werthe von f_x von $+\infty$ bis zu f_β stetig abnehmend fort, und von da ab bis zu $+\infty$ zurück, ohne Unterbrechung stetig wachsend. Wenn nun dabei f_β positiv ist, so ist f_x durchaus allemal positiv, nie negativ und nie Null; und die Gleichung $f_x = 0$ nach x aufgelöst, liefert dann keinen einzigen reellen Werth für x. Ist aber f_β negativ, so geht f_x offenbar zweimal durch Null hindurch, und die Gleichung $f_x = 0$ liefert dann, aufgelöst, für x zwei reelle Werthe. Und ist f_β selbst $= 0$, so fallen diese beiden reellen Werthe von x, welche f_x zu Null machen, mit β zusammen, so daß sie einander gleich und $= \beta$ sind.

2) Liegen aber 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$, $f_{(\alpha_3)}$ dazwischen, so nimmt f_x von $+\infty$ bis zu $f_{(\alpha_1)}$ stetig ab, wächst dann von $f_{(\alpha_1)}$ bis zu $f_{(\alpha_2)}$ stetig, nimmt von da an bis zu $f_{(\alpha_3)}$ hin wieder stetig ab, um zuletzt von da ab bis zu $+\infty$ zurückkehrend, fortwährend stetig zu wachsen; während nämlich dem x nach und nach alle reellen Werthe von $+\infty$ an bis zu $-\infty$ hin stetig abnehmend, gegeben gedacht werden.

Ist nun $f_{(\alpha_1)}$ negativ, $f_{(\alpha_2)}$ positiv, und $f_{(\alpha_3)}$ wieder negativ, so geht f_x viermal durch 0 hindurch und die Gleichung $f_x = 0$, nach x aufgelöst, gibt also dann vier reelle Werthe von x. Sind dagegen $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$, $f_{(\alpha_3)}$ alle dreie positiv, so ist f_x allemal positiv, und es existirt dann wieder kein einziger reeller Werth von x, welcher $f_x = 0$ identisch machte. In jedem andern Falle der Werthe $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$, die Ausnahmsfälle abgerechnet, wo $f_{(\alpha_1)}$ oder $f_{(\alpha_2)}$ oder $f_{(\alpha_3)}$ selber Null sind, geht dagegen f_x wiederum zweimal, und nur zweimal, durch Null hindurch.

Die Gleichung vom 4ten Grade

$$f_x = 0 \quad \text{d. h.} \quad x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0,$$

deren Koeffizienten alle reell sind, hat also entweder gar keine

reelle Auflösung (mithin 4 imaginäre), oder zwei reelle (also auch zwei imaginäre), oder endlich 4 reelle Auflösungen.

§. 200.

Damit also eine biquadratische Gleichung

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$$

vier reelle Auflösungen habe, ist erforderlich

1) daß die Gleichung

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0,$$

für α 3 reelle Werthe α_1, α_2 und α_3 liefere, welches zwei Bedingungen zwischen den Koeffizienten n, p, q und r der gegebenen Gleichung erfordert (s. §. 198. VII.);

2) daß, wenn α_1 der größeste und α_3 der kleinste dieser Werthe ist, zu gleicher Zeit $f_{(\alpha_1)}$ negativ, $f_{(\alpha_2)}$ wieder positiv und $f_{(\alpha_3)}$ nochmals negativ werde, was abermals 3 Bedingungen sind, zwischen n, p, q, r. — Und wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, so hat die biquadratische Gleichung

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$$

nur zwei reelle Auflösungen oder gar keine. Das letztere aber findet nur dann statt, wenn für den einzigen reellen Werth von α, oder für die drei reellen Werthe von α, welche

$$4\alpha^3+3n\alpha^2+2p\alpha+q=0$$

machen, die zugehörigen Werthe f_α von f_x, durchaus positiv sind.

§. 201.

Ist aber der einzige Scheidepunkt f_β, oder einer der 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ oder $f_{(\alpha_3)}$ (§. 199.) der Null gleich, so sind zwei der Auflösungen der Gleichung

$$f_x=0 \quad \text{d. h.} \quad x^4+nx^3+px^2+qx+r=0$$

reell und einander gleich.

Fallen zwei der Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$ mit Null zusammen, so muß man unterscheiden

1) ob $f_{(\alpha_1)} = f_{(\alpha_3)} = 0$ ist; denn dann hat die Gleichung $f_x = 0$, zwei gleiche Auflösungen $x = \alpha_1$, und noch zwei gleiche $x = \alpha_3$, und alle vier Auflösungen sind reell;

2) ob $f_{(\alpha_1)} = f_{(\alpha_2)} = 0$ oder $f_{(\alpha_2)} = f_{(\alpha_3)} = 0$; denn in jedem dieser Fälle hat die Gleichung $f_x = 0$ drei gleiche reelle Auflösungen $x = \alpha_1 = \alpha_2$ oder $x = \alpha_2 = \alpha_3$, während die 4te Auflösung dann nothwendig ebenfalls reell ist. Diese Nummer setzt aber voraus, daß auch die Gleichung

$$4\alpha^3 + 3n\alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$$

zwei gleiche reelle Auflösungen habe, welches unter den Voraussetzungen des (§. 198. V_1.) der Fall ist.

Fallen endlich alle 3 Scheidepunkte $f_{(\alpha_1)}$, $f_{(\alpha_2)}$ und $f_{(\alpha_3)}$ mit der Null zusammen, so sind alle 4 Auflösungen der Gleichung $f_x = 0$ einander gleich und alle 4 reell und $= \alpha_1$. Dies ist jedoch nur dann der Fall, wenn die 3 Werthe von α aus

$$4\alpha^3 + 3n\alpha^2 + 2p\alpha + q = 0$$

alle dreie einander gleich sind, also nur unter den Voraussetzungen des (§. 198. V_2.).

Man erkennt die Richtigkeit von allen diesen Behauptungen sogleich, wenn man den Gang der reellen Werthe von f_x des (§. 198.) aufmerksam verfolgt. Man kann aber auch umgekehrt zu Werke gehen, die Existenz der 4 Auflösungen α, β, γ, δ von $f_x = 0$ voraussetzen, und nach den Bedingungen suchen, welche erfüllt sein müssen, wenn darunter zwei reelle und gleiche Werthe, und dabei die andern Werthe reell und ungleich, oder reell und gleich, oder imaginär sind; oder die Bedingungen aufsuchen, unter denen 3 dieser Werthe reell und einander gleich sind, oder endlich unter welchen alle 4 Werthe einander gleich sind. Mit andern Worten: man kann die Bedingungen aufsuchen, unter welchen der Ausdruck

$$x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r,$$

welcher allemal die Form

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

annehmen kann, die specielleren Formen

1) $(x-\alpha)^2(x-\gamma)(x-\delta)$

oder 2) $(x-\alpha)^2[x-(P+Q\sqrt{-1})][x-(P-Q\sqrt{-1})]$

oder 3) $(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2$

oder 4) $(x-\alpha)^3(x-\delta)$

oder 5) $(x-\alpha)^4$

annehmen wird.

Man darf zu dem Ende nur jede dieser Multiplikationen wirklich ausführen, das Produkt mit dem gegebenen Ausdruck

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r$$

dem (§. 121.) gemäß vergleichen, und man wird allemal 4 Gleichungen erhalten, aus denen dann im ersten Falle α, γ, δ oder im 2ten α, P, Q oder im 3ten α, γ oder im 4ten α, δ oder endlich im 5ten Falle α allein, eliminirt werden kann; und in jedem Falle erhält man eine oder 2 oder 3 Bedingungsgleichungen zwischen den Koeffizienten n, p, q und r, welche, so oft sie erfüllt sind, einen dieser Ausnahmsfälle zu erkennen geben.

§. 202.

Wir fügen noch die Bemerkung hinzu, daß wenn in der Gleichung vom 4ten Grade

$$x^4+nx^3+px^2+qx+r=0,$$

mit reellen Koeffizienten, der letzte r negativ sein sollte, so daß der Werth von f_x für $x=0$, negativ und $=r$ werden sollte, dann die Gleichung selbst wenigstens einen positiven, und wenigstens einen negativen Werth für x liefern werde, weil dann zwischen $+\infty$ und 0, und dann noch einmal zwischen 0 und $-\infty$ ein Werth von x liegen muß, welcher $f_x=0$ identisch macht (§. 198.).

Schluß-Anmerkung.

Ueberhaupt bemerke man, daß wenn f_x für $x = \alpha$ positiv, dagegen für $x = \beta$ negativ wird, dann zwischen α und β ein Werth von x liegen muß, welcher $f_x = 0$ macht. (Vergl. Schluß-Anmerkung zum 10ten Kapitel).

Zwölftes Kapitel.

Von dem Auflösen der Gleichungen durch Substitution, aus anderen zugleich mit ihren Auflösungen gegebenen Gleichungen.

§. 203. Lehrsatz.

Hat man zwei Gleichungen z. B.

$$\text{I.}\quad ax+b-\frac{cx}{d}=m$$

und

$$\text{II.}\quad ax+q-\frac{4x}{3}=8,$$

so daß die zweite aus der ersten entsteht, wenn in der ersten statt gewisser Buchstaben, gewisse andere allgemeine oder Ziffern-Ausdrücke gesetzt werden; wie hier z. B., wenn man setzt

statt	b,	c,	d,	m,
bezüglich	q,	4,	3,	8,

so gibt jede algebraisch abgeleitete Gleichung der Gleichung I.), nothwendig eine abgeleitete Gleichung der Gleichung II.), wenn man in der erstern abgeleiteten Gleichung dieselben Substitutionen vornimmt.

Ist also z. B.

$$1)\quad x=\frac{dm-bd}{ad-c}$$

eine abgeleitete Gleichung der Gleichung I.), so ist auch

$$x = \frac{3 \cdot 8 - q \cdot 3}{a \cdot 3 - c} \quad \text{oder}$$

$$2) \quad x = \frac{24 - 3 \cdot q}{3a - c}$$

nothwendig eine aus der Gleichung II.) algebraisch abgeleitete.

Beweis fällt unmittelbar in die Augen, weil man sich nur vorstellen darf, daß während der Ableitung der 1.) aus der I.), die bemerkten Buchstaben schon die Werthe, die für sie gesetzt werden, repräsentiren. Denn unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung I.) schon die II.), daher auch die abgeleitete 1.) schon eine aus der zweiten II.) abgeleitete, folglich um so mehr, wenn dann statt der Buchstaben die Werthe wirklich gesetzt werden, die sie, der Annahme nach, repräsentiren; d. h. wenn man die 2.) aus ihr macht.

Beispiel 1. Hat man die Gleichungen

$$\text{I.} \quad ax + b - \frac{cx}{d} = m$$

und

$$\text{II.} \quad ax + b + \frac{cx}{d} = m$$

so erhellet, daß die zweite aus der ersten entsteht, wenn man in der ersten entweder $-c$ statt c, oder $-d$ statt d schreibt.

Setzt man daher in der aus I.) abgeleiteten Gleichung

$$1) \quad x = \frac{dm - bd}{ad - c},$$

entweder ebenfalls $-c$ statt c, oder $-d$ statt d, so sind die dann entstehenden

$$\alpha) \quad x = \frac{dm - bd}{ad - (-c)} \quad \text{oder}$$

$$\beta) \quad x = \frac{(-d)m - b(-d)}{a \cdot (-d) - c},$$

nothwendig aus der Gleichung II.) abgeleitete. Die beiden Gleichungen α) und β) fallen aber in die einzige

$$2)\quad x = \frac{dm-bd}{ad+c}$$

zusammen, welche daher eine aus II.) algebraisch abgeleitete ist.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$\text{I.}\quad ax^2+bx = c$$

und eine aus ihr abgeleitete

$$1)\quad x = \frac{-b\pm\sqrt{(4ac+b^2)}}{2a};$$

hat man ferner auch die Gleichung

$$\text{II.}\quad 6x-4x^2 = -5;$$

so sieht man leicht, daß diese II.) aus der I.) erhalten wird, wenn man

$$\begin{array}{rccc} \text{statt} & a, & b, & c \\ \hline \text{bezüglich} & -4, & 6, & -5 \end{array}$$

schreibt. Macht man daher dieselben Substitutionen in 1.), so erhält man

$$x = \frac{-6\pm\sqrt{[4\cdot(-4)\cdot(-5)+6^2]}}{2\cdot(-4)},$$

oder: $$2)\quad x = \frac{6\mp\sqrt{116}}{8};$$

und dieses ist nothwendig eine aus der II.) algebraisch abgeleitete Gleichung.

Man erhält aber auch die II.) aus der I.) wenn man setzt

$$\begin{array}{rcccc} \text{statt} & x, & a, & b, & c \\ \hline \text{bezüglich} & -x, & -4, & -6, & -5. \end{array}$$

Macht man daher in 1.) dieselben Substitutionen, so erhält man:

$$-x = \frac{-(-6)\pm\sqrt{[4\cdot(-4)(-5)+(-6)^2]}}{2\cdot(-4)},$$

oder: $$2)\quad x = \frac{6\pm\sqrt{116}}{8};$$

welches wiederum eine aus II.) abgeleitete sein muß.

Anmerkung. Wenn man die Gleichung II.) aus der Gleichung I.) durch verschiedene Substitutionen ableiten kann, so werden zwar nach dem Lehrsatz, wenn man dieselben Substitutionen nach einander in I.) vornimmt, alle entstehenden Gleichungen nothwendig aus II.) abgeleitete sein; daß sie aber alle gerade dieselben sind, behauptet der Lehrsatz nicht, kann daher auch nicht unbedingt angenommen werden.

§. 204.

Ist die aus I.) abgeleitete Gleichung die Auflösung derselben 1.) nach einem Buchstaben z. B. nach x, und kann die zweite II.) aus der I.) abgeleitet werden, indem man außer andern Substitutionen, statt des Unbekannten x in der I.), gerade den Unbekannten in II.) setzt, so ist die aus 1.) entstehende Gleichung, wenn man dieselben Substitutionen in ihr vornimmt, unfehlbar sogleich die Auflösung von der Gleichung II.).

Auch würde man noch durch diese Substitution die Auflösung der Gleichung II.) aus der Auflösung der I.) ohne Mühe ableiten, und meist mit großem Vortheil, wenn auch statt x nicht gerade der Unbekannte (Buchstabe) von II.) selber, sondern ein aus ihm einfach zusammengesetzter Ausdruck substituirt werden müßte.

Beispiel. Man habe

$$\text{I.}\quad 4x^2 - 6x = 5 \qquad \text{und ihre Auflösung}$$

$$1)\quad x = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{8}, \qquad \text{so wie auch}$$

$$\text{II.}\quad 4x^2 + 6x = 5;$$

so sieht man leicht, daß die II.) aus der I.) entsteht, wenn $-x$ statt x gesetzt wird. Nimmt man daher dieselbe Substitution in 1.) vor, so erhält man:

$$-x = \frac{6 \pm \sqrt{116}}{8}$$

oder

$$2)\quad x = \frac{-6 \mp \sqrt{116}}{8},$$

welches die Auflösung der Gleichung II.) sein muß (weil sie nothwendig eine aus II.) abgeleitete Gleichung ist).

Anmerkung. Diese Auflösung durch Substitution ist besonders vortheilhaft bei solchen quadratischen Gleichungen, wie eine im obigen Beispiel betrachtet worden. Man nimmt eine allgemeine dieser Gattung, z. B.

$$x^2+px+q=0,$$

löst sie auf, und erhält

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{(p^2-4q)}}{2},$$

und indem man nun jeder andern gegebenen quadratischen Gleichung dieselbe Form giebt, erhält man augenblicklich die Auflösung derselben durch Substitution aus der hier ein für allemal entwickelten. — Eben so enthält die Auflösung des (§. 138.) die aller quadratischen Gleichungen, indem man nur jede gegebene auf die Form $ax^2+bx+c=0$ bringt, und dann in jener Auflösung statt a, b, c, die gehörigen Werthe setzt.

§. 205.

Man kann sich auch zuweilen desselben Mittels bedienen, um aus einer gegebenen Auflösung einer gegebenen Gleichung nach einem Buchstaben, die Auflösung derselben Gleichung nach einem andern ihrer Buchstaben abzuleiten.

Es sei z. B. gegeben

$$\text{I.}\quad x^2+px+p^2=q \qquad \text{und die Auflösung}$$

$$1)\quad x=\frac{-p\pm\sqrt{(4q-3p^2)}}{2}.$$

Soll nun dieselbe Gleichung nach p aufgelöst werden, so hat man

$$\text{II.}\quad x^2+px+p^2=q$$

welche aus der I.) entsteht, wenn

$$\begin{array}{rcc} \text{statt} & \underline{x,} & \underline{p} \\ \text{bezüglich} & p, & x \end{array}$$

gesetzt wird. Dieselbe Substitution in 1.) vorgenommen gibt aber sogleich:

$$2)\quad p = \frac{-x \pm \sqrt{4q - 3x^2}}{2}.$$

§. 206. Lehrsatz.

Hat man zwei oder mehr unabhängige Gleichungen z. B.

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{matrix} ax + by = c \\ mx + py = q \end{matrix}\right\}$$

und eben so viele andere derselben Art

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{matrix} az - by = c \\ -3mz + ny = 2h \end{matrix}\right\};$$

und gehen die erstern in die andern über, dadurch daß man statt gewisser Buchstaben, gewisse andere Ausdrücke setzt, so geht auch jede aus den erstern abgeleitete Gleichung in eine aus dem zweiten Paar Gleichungen abgeleitete über, wenn man in ihr dieselben Substitutionen vornimmt.

Setzt man nämlich in I.)

$$\begin{matrix} \text{statt} & x, & b, & m, & p, & q \\ \hline \text{bezüglich} & z, & -b, & -3m, & n, & 2h, \end{matrix}$$

so erhält man wirklich die Gleichungen II.).

Ist nun

$$1)\quad x = \frac{cp - bq}{ap - bm}$$

eine aus den Gleichungen I.) abgeleitete, so erhält man aus ihr durch dieselben Substitutionen

$$2)\quad z = \frac{cn + 2bh}{an - 3bm},$$

welches eine aus den Gleichungen II.) abgeleitete sein muß.

Beweis wie der von (§. 203.).

§. 207.

Auch dieses Satzes bedient man sich, um aus den gegebenen Auflösungen gegebener Gleichungen, die Auflösungen anderer Gleichungen, durch bloße Substitution abzuleiten.

Man löst z. B. die beiden Gleichungen

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{l} ax+by=c \\ mx+py=q \end{array}\right\}$$

ein für allemal nach x und y auf, und erhält

$$1)\quad x=\frac{cp-bq}{ap-bm} \quad \text{und} \quad y=\frac{aq-cm}{ap-bm}.$$

Sind nun gegeben die beiden Gleichungen

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{l} (ah-cf)x+(bh-cg)y=dh-ck \\ (ap-cm)x+(bq-cn)y=dp-cq \end{array}\right\},$$

so entstehen diese aus I.) indem man setzt

statt	a,	b,	c,	m,	p,	q
bezüglich	ah−cf,	bh−cg,	dh−ck,	ap−cm,	bq−cn,	dp−cq;

und man erhält durch dieselben Substitutionen aus 1.):

$$2)\quad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{(dh-ck)(bq-cn)-(bh-cg)(dp-cq)}{(ah-cf)(bq-cn)-(bh-cg)(ap-cm)} \\[2ex] y=\dfrac{(ah-cf)(dp-cq)-(dh-ck)(ap-cm)}{(ah-cf)(bq-cn)-(bh-cg)(ap-cm)} \end{array}\right\}$$

welches die Auflösungen von II.) sind.

§. 208.

Man kann sich aber auch oft desselben Mittels bedienen, um aus einer einzigen Auflösung nach einem Unbekannten, die Auflösungen nach den übrigen Unbekannten derselben gegebenen, von einander unabhängigen Gleichungen, abzuleiten.

Es sei z. B. aus den Gleichungen

$$\text{I.}\quad \left\{\begin{array}{c} ax+by+cz=d \\ fx+gy+hz=k \\ mx+ny+pz=q \end{array}\right\}$$

gefunden die Auflösung

$$1)\quad x=\frac{cnk+bhq+dgp-bkp-dhn-cgq}{cfn+bhm+agp-bfp-ahn-cgm},$$

und will man hieraus die Auflösungen nach y finden, so sind hier dieselben Gleichungen gegeben:

$$\text{II.}\quad \left\{\begin{array}{c} ax+by+cz=d \\ fx+gy+hz=k \\ mx+ny+pz=q \end{array}\right\}$$

und man muß suchen, welche Substitutionen in I.) vorgenommen werden müssen, um, während y statt x gesetzt wird, dieselben Gleichungen wieder zu erhalten. Es ist aber sehr leicht zu sehen, daß dies geschieht, wenn

statt	x,	y,	a,	b,	f,	g,	m,	n,
bezüglich	y,	x,	b,	a,	g,	f,	n,	m

gesetzt wird. Durch dieselben Substitutionen erhält man dann aus 1.):

$$2)\quad y=\frac{cmk+ahq+dfp-akp-dhm-cfq}{cgm+ahn+bfp-agp-bhm-cfn},$$

und dies ist ebenfalls eine aus denselben 3 Gleichungen abgeleitete, folglich die Auflösung derselben 3 Gleichungen nach y.

Setzt man in I.)

statt	x,	z,	a,	c,	f,	h,	m,	p,
bezüglich	z,	x,	c,	a,	h,	f,	p,	m,

so kehren dieselben Gleichungen wieder; macht man daher in 1.) dieselben Substitutionen, so erhält man

3) $z = \frac{ank + bfq + dgm - bkm - dfn - agq}{ahn + bfp + cgm - bhm - cfn - agp}$,

welches eine Auflösung nach z von denselben 3 Gleichungen ist.

Die Auflösung 1.) kann man auch nach (§. 207.) aus den dortigen Gleichungen, welche die 3 gegebenen Gleichungen I.) durch Elimination von z liefern, ebenfalls schon durch Substitution finden.

Dreizehntes Kapitel.

Fortsetzung der Ziffernrechnung. In's Besondere Rechnung mit allgemein-numerischen Ausdrücken, d. h. mit Ausdrücken von der Form $p+q\sqrt{-1}$.

Vorerinnerung.

In dem fünften Kapitel haben wir gelehrt, wie ganze Zahlen, numerisch ausgedrückt, addirt, subtrahirt, multiplicirt, dividirt, potenzirt und radizirt werden, d. h. wie man wieder, so oft solches möglich ist, solche numerische Zahlen findet, welche den genannten Verbindnngen der beiden gegebenen numerischen Zahlen gleich sind. — Indem man nachgehends die Formeln der 3 ersten Kapitel zu Hülfe nimmt, kann man auch gebrochene und gemischte und positive und negative Zahlen, also reelle Zahlen, deren einzelnen Theile numerisch sind, durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenziren und Radiziren mit einander verbinden, und die Endresultate jedesmal wieder, so oft solches möglich ist, in ähnliche reelle Zahlen ausdrücken, d. h. in positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen, deren einzelne Bestandtheile numerische ganze Zahlen sind.

Durch die Einführung der allgemeinen Quadratwurzel, und der allgemeinen Kubik- und Biquadrat-Wurzeln, überhaupt durch die vorhergehenden allgemeinen Auflösungen der höhern Gleichungen bis zum 4ten Grade, mit reellen Koeffizienten, sind aber, neben den reellen Zahlen, neue specielle Zahlformen hervorgegangen, [immer ursprünglich von absoluten ganzen (wirklichen) Zahlen ausgehend], welche wir mit dem Namen der imaginären Zahlen belegt haben, welche jedoch immer in der bestimmten Form $P+Q\sqrt{-1}$ erscheinen, wo P und Q beliebige der reellen Zahlen sein können. Und in dieser Form $P+Q\sqrt{-1}$ kann man sich selbst alle reellen Zahlen vorgestellt denken, weil man nur $Q=0$ zu nehmen, dagegen P beliebig reell sich zu denken hat. Ein solcher Ausdruck $p+q\sqrt{-1}$ ist daher der allgemeinste unter den speciellen Zahlformen, weil er sie alle in sich schließt, und er wird hier ein allgemein-numerischer Ausdruck genannt. — Das

gegenwärtige Kapitel aber ist dazu bestimmt, nachzuweisen, wie die Resultate zweier durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzirung und Radiziren verbundener Ausdrücke, welche von dieser Form $P+Q\sqrt{-1}$ sind und eben so gut reell als auch imaginär sein können, in Ausdrücke wieder von derselben Form verwandelt werden, so oft nämlich solches mit den bisher entwickelten Hülfsmitteln, und bei dem bisherigen besondern Zustand unserer Begriffe der Potenz und der Wurzel möglich ist.

Endlich soll dieses Kapitel auch noch nachweisen, daß überhaupt alle bis jetzt erhaltenen Ausdrücke die ursprünglich den ganzen Zahlen der Zahlenreihe ihr Entstehen verdanken, sie mögen nun direkt zusammengesetzt oder als die Unbekannten einer Gleichung des 2ten, 3ten oder 4ten Grades angesehen sein, auch wenn die Koeffizienten dieser Gleichungen selbst wieder beliebig auf dieselbe Weise entstanden gedacht werden, allemal die Form $p+q\sqrt{-1}$ annehmen können und müssen, wo p und q reelle Ausdrücke vorstellen.

§. 209. Lehrsätze.

I. Sind m und m_1 zwei positive ganze Zahlen und $\frac{p}{q}$, so wie $\frac{p_1}{q_1}$, zwei echt gebrochene ebenfalls positive Zahlen, und ist dabei

$$1)\quad m+\frac{p}{q}=m_1+\frac{p_1}{q_1} \quad \text{gegeben,}$$

so ist nothwendig

$$m=m_1 \quad \text{und} \quad \frac{p}{q}=\frac{p_1}{q_1}.$$

II. Sind m und n reell vorausgesetzt, und ist dabei

$$m^2+n^2=0,$$

so muß auch

$$m=0 \quad \text{und} \quad n=0$$

sein.

Beweis 1. Denn wären m und m_1 nicht einander gleich, so wäre m oder m_1 die größere Zahl, z. B. m.

Dann wäre

$$m - m_1 + \frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1};$$

d. h. der echte Bruch $\frac{p_1}{q_1}$ größer als die ganze Zahl $m - m_1$, welches nicht möglich ist; also ist $m = m_1$; und dann auch $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$.

Beweis 2. Denn wäre m negativ oder positiv, so wäre m^2 positiv, und dann n^2 negativ, nämlich $= 0 - m^2$, also n nicht reell.

Anmerkung. Und weiß man, daß $\frac{p}{q}$ und $\frac{p_1}{q_1}$ in ihren kleinsten Zahlen ausgedrückt sind, so ist auch noch zu gleicher Zeit $p = p_1$ und $q = q_1$.

§. 210. Erklärung.

Eine beliebige der beiden Formen $+\sqrt{-1}$ oder $-\sqrt{-1}$, welche beide in der Form $\sqrt{-1}$ gedacht werden müssen, wollen wir von nun an immer durch den Buchstaben i des kleinern lateinischen Alphabets, bezeichnen.

Anmerkung. Es stellt also i, so oft solches auch immer vorkommt, doch immer einen und denselben der beiden, in der allgemeinen Form $\sqrt{-1}$ enthaltenen speciellen Formen $+\sqrt{-1}$ und $-\sqrt{-1}$ vor, so daß die beiden Formwerthe von $\sqrt{-1}$ auch durch

$$+i \quad \text{und} \quad -i$$

vorgestellt werden können.

§. 211. Lehrsätze.

Es ist allemal nicht bloß $i^0 = 1$, sondern auch:

1) $i^1 = i$; 2) $i^2 = -1$; 3) $i^3 = -i$; 4) $i^4 = +1$;

5) $i^5 = i$; 6) $i^6 = -1$; 7) $i^7 = -i$; 8) $i^8 = +1$;
9) $i^{4n+1} = i$; 10) $i^{4n+2} = -1$; 11) $i^{4n+3} = -i$;
12) $i^{4n+4} = i^{4n} = +1$;

wenn n, Null oder jede positive oder negative ganze Zahl bedeutet.

Beweis. Denn es ist

$$i^{4n} = (i^4)^n = (+1)^n = +1,$$

sowohl wenn n eine positive, als auch eine negative ganze Zahl ist. Dabei aber ist noch

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i; \quad i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2; \quad i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3; \quad \text{ꝛc. ꝛc.}$$

§. 212.

Die beiden Werthe von $\sqrt{-a}$ kann man daher nun auch so schreiben $+i \cdot \sqrt{a}$ und $-i \cdot \sqrt{a}$, wo $\sqrt{a}$ einen beliebigen ihrer beiden Werthe vorstellt.

§. 213. Lehrsatz.

Sind p, q, p_1 und q_1 beliebige reelle Zahlen, und dabei

1) $p + q \cdot i = p_1 + q_1 \cdot i$ gegeben,

so muß nothwendig auch

$$p = p_1 \quad \text{und} \quad q = q_1 \quad \text{sein.}$$

Beweis. Denn aus der Gleichung 1.) folgt:

2) $p - p_1 = (q_1 - q)i$.

Wäre nun nicht $q = q_1$, also $q_1 - q$ nicht Null, so folgerte

3) $\dfrac{p - p_1}{q_1 - q} = i$;

d. h. die $\sqrt{-1}$ wäre der reellen Zahl $\dfrac{p - p_1}{q_1 - q}$ gleich, was offenbar ein Widerspruch ist. — Also muß $q = q_1$ und dann auch $p = p_1$ sein.

Anmerkung. Man muß sich aber sehr hüten, den Satz (§. 209.) und den vorstehenden da anzuwenden, wo die Bedingungen, unter denen sie erwiesen sind, nicht stattfinden. Namentlich darf dieser letztere nicht angewandt werden, so lange p oder p_1, q oder q_1 noch allgemein, also nicht nothwendig reell sind. — So ist z. B.

$$2+3\sqrt{-1} = (3\sqrt{-1})-(2\sqrt{-1})\cdot\sqrt{-1}$$

d. h. $$2+3\cdot i = (3i)-(2i)\cdot i$$

d. h. $$p+q\cdot i = p_1+q_1\cdot i,$$

wenn man unter p, q, p_1 und q_1 bezüglich die Werthe 2, 3, $3i$ und $-2i$, vorgestellt sich denkt. Wer aber daraus folgern wollte, daß nun $p = p_1$ und $q = q_1$ d. h. $2 = 3i$ und $3 = -2i$ sein müsse, der würde gewaltig irrige Resultate hervorbringen.

§. 214.

Sind daher p und q nicht imaginäre Ausdrücke, dabei aber

$$p+q\cdot i = 0,$$

so muß einzeln

$$p = 0 \quad \text{und} \quad q = 0$$

sein.

§. 215. Aufgabe.

Die beiden Ausdrücke $p+q\cdot i$ und $p_1+q_1 i$, wo p, p_1, q und q_1 reell sind, zu addiren, zu subtrahiren, zu multipliciren und zu dividiren, zu, von, mit und durcheinander; unter der Bedingung, daß die Resultate auf dieselbe Form gebracht werden sollen.

Auflösung. Es ist

1) $(p+qi)+(p_1+q_1 i) = (p+p_1)+(q+q_1)\cdot i;$

2) $(p+qi)-(p_1+q_1 i) = (p-p_1)+(q-q_1)\cdot i;$

3) $(p+qi)\cdot(p_1+q_1 i) = (pp_1-qq_1)+(pq_1+p_1 q)\cdot i;$

4) $\dfrac{p+qi}{p_1+q_1 i} = \dfrac{pp_1+qq_1}{p_1^2+q_1^2} + \dfrac{p_1 q-pq_1}{p_1^2+q_1^2}\cdot i.$

Beweise. Die Nummern 1., 2. und 3.) ergeben sich von selbst. — Um aber $\frac{p+qi}{p_1+q_1 i}$ auf dieselbe Form zu bringen, hat man Zähler und Nenner mit $p_1-q_1 i$, multiplicirt.

Anmerkung. Man konnte auch die (N. 4.) so finden: Man suchte x und y so, daß sie reell sind, und daß

1) $\frac{p+qi}{p_1+q_1 i}=x+yi$ wird.

Dann hat man

2) $p+qi=(p_1x-q_1y)+(p_1y+q_1x)i$;

folglich nach (§. 213.):

3) $p=p_1x-q_1y$ und 4) $q=q_1x+p_1y$,

woraus sich sogleich x und y, und noch überdies beide als reelle Ausdrücke finden lassen.

§. 216. Aufgabe.

Man soll den Ausdruck $p+qi$, wo p und q reell sind, mit 2, 3 und 4 potenziren, d. h. aber, die Resultate auf dieselbe Form bringen.

Auflösung. Nach der Definition der ganzen Potenz erhält man durch Multiplikation der gleichen Faktoren und mit Zuziehung des (§. 215.):

1) $(p+qi)^2=(p^2-q^2)+2pq\cdot i$;

2) $(p+qi)^3=(p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)\cdot i$
$=p(p^2-3q^2)+q(3p^2-q^2)\cdot i$;

3) $(p+qi)^4=(p^4-6p^2q^2+q^4)+(4p^3q-4pq^3)\cdot i$
$=(p^4-6p^2q^2+q^4)+4pq(p^2-q^2)\cdot i$.

Anmerkung. Man kann auch $(p+qi)^m$, wenn m eine Differenz ganzer Zahlen ist, auf dieselbe Form $P+Qi$ bringen, weil alle Produkte und alle Quotienten solcher Ausdrücke, nach (§. 215.) allemal wieder Ausdrücke von derselben Form werden.

§. 217. Aufgabe.

Man soll aus $p+qi$, wo p und q reell sind, die Quadratwurzel ausziehen; d. h. aber, das Resultat auf dieselbe Form bringen.

Auflösung. Es werden hier reelle Werthe für x und y gesucht und so, daß

$$1)\quad \sqrt{p+qi} = x+y\cdot i,$$

also
$$2)\quad p+qi = (x+yi)^2 = (x^2-y^2)+2xy\cdot i,$$

demnach, dem (§. 213.) gemäß,

$$3)\quad p = x^2-y^2 \quad \text{und} \quad 4)\quad q = 2xy \quad \text{wird.}$$

Diese letztern beiden Gleichungen aufgelöst geben aber, nach (§. 189.), 4 Werthe für x, und zu jedem Werth von x, einen zugehörigen Werth von y, nämlich

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}$$

und
$$y = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}},$$

wo die innere Wurzel, d. h. $\sqrt{p^2+q^2}$, noch zweideutig, bei der äußern dagegen die Zweideutigkeit auf das vorgesetzte ($+$ oder $-$) Zeichen geworfen ist, so daß diese äußere Wurzel selbst als eindeutig angesehen werden kann. —

Von diesen Werthen von x und y, muß man nun zuerst die zusammengehörigen heraussuchen, welche die beiden gegebenen Gleichungen 3. und 4.) zugleich identisch machen; nachgehends aber von den 4 Paaren zusammengehöriger Werthe, welche den Gleichungen 3. und 4.) genügen, die reellen herausnehmen, welche allein auch den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen.

Weil nun $x^2-y^2=p$ werden soll, so muß in beiden Ausdrücken (für x und y) die $\sqrt{p^2+q^2}$ durchaus immer einen und denselben ihrer Werthe vorstellen. Und weil $2xy=q$ werden soll, so müssen die äußern ($+$ oder $-$) Zeichen in den

beiden Ausdrücken für x und y so genommen werden, daß x und y einerlei (+ oder −) Zeichen haben, wenn q positiv, dagegen verschiedene (+ oder −) Zeichen, wenn q negativ sein sollte. — Ferner ist $\sqrt{p^2+q^2}$ allemal größer als p; also werden x und y imaginär, wenn man von $\sqrt{p^2+q^2}$ ihren negativen Werth nehmen wollte; dagegen reell, wenn, wie dies also hier geschehen muß, $\sqrt{p^2+q^2}$ positiv genommen wird.

Von den 4 Werthen von x und y, welche den Gleichungen 3. und 4.) genügen, entsprechen also nur zweie, nämlich die beiden reellen, unserer gegenwärtigen Aufgabe, und man findet

$$\sqrt{p+qi} = \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}} \pm i\cdot\sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}\right],$$

wo die Wurzeln rechts alle ihre absoluten (positiven) Werthe vorstellen, und wo von den innern (+ oder −) Zeichen, das (+) Zeichen gilt, wenn q positiv, das (−) Zeichen dagegen, wenn q negativ ist. —

Dieses letztern Umstands wegen, schreibt man wohl auch das Endresultat für künftigen praktischen Gebrauch, gerne so:

$$\sqrt{p\pm qi} = \sqrt{\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}} \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}p+\tfrac{1}{2}\sqrt{p^2+q^2}}\cdot i,$$

in welcher Formel man sich q absolut denkt, und wo man die obern (+ oder −) Zeichen zugleich gelten läßt, oder die untern zugleich, während man nicht vergißt, daß man dem ganzen Ausdruck rechts noch ein (+ oder −) Zeichen vorsetzen kann und muß, wenn man beide Werthe von $\sqrt{p+qi}$ zugleich ausgedrückt haben will.

Beweis. Denn es sind erstlich x und y reell, und zweitens so gefunden worden, daß die Gleichungen 3. und 4.), also auch die Gleichungen 2.) und 1.) identisch werden, welches letztere in der Aufgabe selbst verlangt war.

§. 218. Lehrsatz.

Aber nicht bloß sind, wenn p und q reell, die beiden Werthe der Quadratwurzel aus p+qi allemal auf dieselbe Form

zu bringen, sondern auch die 3 Werthe von $\sqrt[3]{p+qi}$, und die 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$ werden allemal dieselbe Form $x+yi$ annehmen können, wo x und y von p und von q abhängige, aber reelle Ausdrücke sind.

Beweis I. Setzt man x und y reell und so voraus, daß

1) $\sqrt[3]{p+qi} = x+yi$ wird,

so muß

2) $p+qi = (x+yi)^3$
$= (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)\cdot i$

d. h. nach (§. 213.)

3) $p = x^3-3xy^2$

und 4) $q = 3x^2y-y^3 = (3x^2-y^2)y$

sein. Umgekehrt, kann man reelle Werthe für x und y finden, welche die Gleichungen 3.) und 4.) zugleich identisch machen, so machen dieselben auch die 1.) identisch, und der erste Theil des Lehrsatzes ist dann erwiesen.

Eliminirt man aber aus 3.) und 4.) zuerst y^2 durch die Substitutions-Methode, indem man aus 3.):

$$y^2 = \frac{x^3-p}{3x}$$

findet und den Werth dafür in 4.) substituirt, so findet sich

$$q = \left(3x^2 - \frac{x^3-p}{3x}\right)y,$$

woraus 5) $y = \dfrac{3qx}{8x^3+p}$ sich ergibt.

Wird nun dieser Werth von y in 3.) substituirt, um y gänzlich zu eliminiren, so erhält man

6) $(x^3)^3+\frac{3}{4}p(x^3)^2-(\frac{15}{64}p^2+\frac{27}{64}q^2)(x^3)-\frac{1}{64}p^3 = 0,$

welche Gleichung nach x^3 kubisch ist, mit reellen Koeffizienten, also nach (§. 177.) wenigstens einen reellen Werth α für x^3 liefert, so daß man

$$7)\quad x^3 = \alpha \quad \text{oder} \quad x^3 - \alpha = 0$$

wiederum mit reellen Koeffizienten hat, also für x selbst, ebenfalls nach (§. 177.), wenigstens einen reellen Werth x_1 findet. Und zu diesem reellen Werth x_1 findet sich aus 5.) der zugehörige Werth y_1 von y, ebenfalls reell, nämlich $y_1 = \frac{3qx_1}{8x_1{}^3+p}$; weil gerade dieser Werth von y genommen werden muß, wenn 3.) und 4.) zugleich identisch werden sollen.

Es existirt also x_1 und y_1 reell und so, daß

$$\sqrt[3]{p+qi} = x_1 + y_1 \cdot i \quad \text{ist.}$$

Ist aber $x_1+y_1\cdot i$ einer der 3 Werthe der Kubikwurzel $\sqrt[3]{p+qi}$, so finden sich alle 3 Werthe derselben, wenn man den eben gefundenen $x_1+y_1\cdot i$, mit den 3 Werthen von $\sqrt[3]{1}$ d. h. mit

$$1, \quad -\tfrac{1}{2}+(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})\cdot i \quad \text{und} \quad -\tfrac{1}{2}-(\tfrac{1}{2}\sqrt{3})\cdot i$$

multiplicirt, und da müssen nach (§. 214. N. 3.) alle 3 Werthe nothwendig dieselbe Form annehmen, welche der erste schon hat; sie werden nämlich:

der erste $= x_1+y_1\cdot i$;

der zweite $= -(\tfrac{1}{2}x_1+\tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3})+(\tfrac{1}{2}x_1\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}y_1)\cdot i$;

und der dritte $= -(\tfrac{1}{2}x_1-\tfrac{1}{2}y_1\sqrt{3})+(-\tfrac{1}{2}x_1\sqrt{3}-\tfrac{1}{2}y_1)\cdot i$ sein,

wo $\sqrt{3}$ durchaus und so oft sie vorkommt, ihren absoluten Werth bedeuten mag *).

---

*) Wären p und q in Ziffern wirklich gegeben, und wollte man, um den reellen Werth α von x^3 aus 6.) zu finden, die Auflösung der (§§. 164 bis 166.) anwenden, so würde man nach (§. 178.) bald finden, daß hier alle 3 Werthe von (x^3) reell sind, daß daher die Cardan'sche Formel hier allemal in dem irreduktiblen Falle sich befindet, mithin aus ihr die reellen Werthe von x^3 nicht eher wirklich in Ziffern ausgedrückt gefunden werden können, als bis die hier oben in Form unsers Lehrsatzes hingestellte Aufgabe gelöst ist. Das wirkliche Auswerthen in Ziffern, von x_1 und y_1, muß also einem viel spätern Kapitel überlassen bleiben. — Nebenbei kann man aber noch be-

Beweis II. Weil $\sqrt[4]{p+qi} = \sqrt{\sqrt{p+qi}}$; und weil dabei die beiden Werthe von $\sqrt{p+qi}$ bereits die Form $\pm P \pm Qi$ erhalten haben, so ist $\sqrt[4]{p+qi} = \sqrt{\pm P \pm Qi}$ offenbar von derselben Form, und alle 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$ sind demnach mittelst des (§. 216.) leicht auszumitteln.

Und ist $x_1 + y_1 \cdot i$ einer der 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$, so erhält man alle 4, wenn man solchen nach und nach mit den 4 Werthen von $\sqrt[4]{1}$ multiplicirt, d. h. mit

$$+1,\quad -1,\quad +i \quad \text{und} \quad -i;$$

so daß man erhält

$$x_1 + y_1 \cdot i; \quad -x_1 - y_1 \cdot i;$$
$$-y_1 + x_1 \cdot i; \quad +y_1 - x_1 \cdot i;$$

als die 4 Werthe von $\sqrt[4]{p+qi}$.

§. 219. Lehrsatz.

Jeder ursprünglich aus ganzen Zahlen (aus wirklichen Zahlen der Zahlenreihe) beliebig durch die 4 ersten Operationen, oder auch durch die 2 letztern (Potenziren und Radiziren) zusammengesetzte Ausdruck, wenn nur keine andern Potenzen und Wurzeln genommen werden, als solche die in irgend einem der vorhergehenden Paragraphen ihre Bedeutung bekommen haben; ferner alle Werthe des Unbekannten x, wie solche durch eine

---

merken, daß x aus 6.) 9 Werthe bekommt, nämlich 3 reelle Werthe α_1, α_2 und α_3 für x^3, und dann für x, die 9 Werthe $\sqrt[3]{\alpha_1}$, $\sqrt[3]{\alpha_2}$, $\sqrt[3]{\alpha_3}$; von denen dann dreie reell, die übrigen 6 aber imaginär und von der Form $P+Qi$ sind. Zu den imaginären Werthen von x, ergeben sich dann aus 5.) auch imaginäre Werthe für y, und $x+yi$ ist doch jedesmal einer der 3 Werthe von $\sqrt[3]{p+qi}$, so daß sich jeder dieser letztern 6 Werthe in einen der 3 oben gefundenen immer wird umformen lassen.

(bisher aufgelöste) Gleichung der 4 ersten Grade gegeben sein mögen, während die Koeffizienten dieser Gleichungen selbst wieder beliebig durch bisher betrachtete Zusammensetzungen aus wirklichen Zahlen oder durch Auflösungen ähnlicher Gleichungen mit ähnlichen Koeffizienten entstanden gedacht werden; — also jeder bis jetzt aus ursprünglich ganzen Zahlen möglicherweise gebildete oder als durch bestimmte Zusammensetzung gegeben gedachte Ausdruck, — ist entweder reell oder imaginär, aber in jedem Falle auf die Form

$$P+Q\cdot i$$

zu bringen, wo P und Q für jeden einzelnen Fall zu findende reelle Ausdrücke sind (d. h. positive oder negative ganze oder gebrochene Zahlen oder auch Null).

Beweis. Alle möglichen Zusammensetzungen der 4 erstern Operationen aus ursprünglich ganzen Zahlen geben nach den Elementarformeln allemal eine reelle Zahl, und jede reelle Zahl z ist unter der Form

$$P+Qi$$

enthalten, wenn man unter Q den reellen Werth Null sich denkt und unter P den reellen Werth z selbst.

Die Werthe des Unbekannten x aus den Gleichungen

$$ax+b=0,$$
$$ax^2+bx+c=0,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$
$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

mit reellen Koeffizienten, also auch alle Werthe von x aus den Gleichungen

$$x^2-a=0,$$
$$x^3-a=0,$$
$$x^4-a=0,$$

wo a reell ist, d. h. also alle Werthe der allgemeinen Wurzeln

$$\sqrt{a},\quad \sqrt[3]{a} \text{ und } \sqrt[4]{a},$$

wenn a reell ist, haben nach (§§. 139. 179. und 188.) ebenfalls nothwendig die Form

$$P+Qi$$

wenn sie imaginär sind, während dieselbe Form für sie beibehalten werden kann, wenn sie reell und $= z$ sind, in so ferne man dann nur unter Q den reellen Werth Null und unter P diesen reellen Werth z vorgestellt denken darf.

Werden ferner Ausdrücke von der Form $P+Qi$, wo P und Q beliebig reelle Zahlen vorstellen, auf's Neue mit einander durch die 4 erstern Operationen verbunden, oder zur ganzen, oder zur Differenz-Potenz erhoben, oder endlich, wird

$$\sqrt{P+Qi} \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{P+Qi} \quad \text{oder} \quad \sqrt[4]{P+Qi}$$

gesucht, so erhält man doch immer wieder Ausdrücke von derselben Form, nach (§§. 215.–218.).

Also bleibt nur noch übrig zu untersuchen, ob die Werthe von x aus den Gleichungen

$$ax+b=0,$$
$$ax^2+bx+c=0,$$
$$ax^3+bx^2+cx+d=0,$$
$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0,$$

auch dann noch auf dieselbe Form $P+Qi$ gebracht werden können, wenn die Koeffizienten a, b, c, d, e nicht alle reell, sondern solche, bis jetzt erhaltene allgemeinste der speciellen Zahlformen, nämlich solche Ausdrücke von der Form $P+Qi$ sind, also entweder alle imaginär, oder zum Theil doch imaginär, zum Theil reell.

Betrachtet man aber die allgemeinen Auflösungen der quadratischen, kubischen und biquadratischen Gleichungen, so ergibt sich augenblicklich, daß man, um jetzt die Werthe von x zu finden, bloß Ausdrücke von der Form $P+Qi$, zu addiren, subtrahiren, multipliciren oder zu dividiren, oder endlich aus solchen Ausdrücken die allgemeine Quadrat- oder Kubik-Wurzel

zu nehmen hat, welche, wie wir wissen, allemal Ausdrücke von derselben Form geben.

Also ist unser Lehrsatz ganz und vollständig erwiesen.

§. 220. Zusatz.

Nennen wir jeden Ausdruck von der Form P+Qi, wo P und Q beliebige reelle Zahlen sind, der also eben so gut reell als auch imaginär sein kann, eine allgemein-numerische Zahl, so enthält die allgemein-numerische Zahl alle bis jetzt möglichen speciellen Zahlformen, sie mögen direkt durch gegebene Zusammensetzungen, oder als Unbekannte aus Gleichungen der 4 ersten Grade zu finden sein.

Und wenn in der Folge neue Erweiterungen der Begriffe der Potenzen, der Wurzeln und der Logarithmen möglich und nöthig werden sollten, so hat man nur zu zeigen, daß man nie mit dieser allgemein-numerischen Zahl P+Qi in Widerspruch gerathen könne, um überzeugt zu sein, daß man gegen nichts, früher als wahr erkanntes, anstoßen könne, daß also dieses Erweitern der Begriffe selbst erlaubt sei und nie zu unrichtigen Resultaten führen werde; mithin bloß zu richtigen Resultaten führen müsse.

Schluß-Anmerkung.

Am Schlusse dieser Abtheilung der Zahlenlehre machen wir sogleich noch auf dasjenige aufmerksam, was der nächstfolgende zweite Theil dieses Werkes in Bezug auf die in den 5 letztern Kapiteln vorgetragenen Lehren zu ihrer Vervollständigung zu leisten hat.

A. In Bezug auf die höheren Gleichungen vom n^{ten} Grade, d. h. auf die Gleichungen von der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

muß gezeigt werden:

1) sind die Koeffizienten a_1, $a_2 \cdots a_n$ alle von der Form

$p+q\cdot i$, also alle reell oder alle imaginär, oder zum Theil reell oder zum Theil imaginär, so giebt es immer einen reellen oder imaginären Werth von der Form $\alpha+\beta\cdot i$, welcher sie identisch macht.

2) Es gibt immer n solche Werthe für x und nicht mehr als n Werthe, alle reell oder imaginär von derselben Form, welche die gegebene Gleichung vom n^{ten} Grade identisch machen.

3) Die ganze Funktion von x vom n^{ten} Grade

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

läßt sich allemal in n einfache Faktoren von der Form $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, u. s. w. f. zerlegen, und zwar nur auf eine einzige Art, und dabei sind α, β, γ u. s. w. n Werthe von x, welche dieselbe ganze Funktion von x zu 0 machen, oder der höhern Gleichung in N. 1. genügen.

4) Sind in der höhern Gleichung der N. 1. vom n^{ten} Grade alle Koeffizienten reell, so kommen unter den n Werthen von x, die ihr genügen, die imaginären Werthe, wenn deren überhaupt existiren, jedesmal paarweise vor, dergestalt, daß, wenn $p+q\cdot i$ der eine ist, dann $p-q\cdot i$ der andere sein muß, während p und q dieselben reellen Werthe behalten.

Daher sind dann auch die einfachen Faktoren, in welche sich die ganze Funktion vom n^{ten} Grade nach N. 3. zerlegen läßt, ebenfalls so gepaart, daß, wenn $(x-p)-q\cdot i$ der eine ist, dann $(x-p)+q\cdot i$ der andere sein muß, so also, daß das Produkt beider den Doppelfaktor $x^2-2px+(p^2+q^2)$ giebt. — Jede ganze Funktion vom n^{ten} Grade mit reellen Koeffizienten hat daher entweder lauter reelle einfache Faktoren, oder die imaginären so paarweise, daß das Produkt eines solchen Paares allemal einen reellen Doppelfaktor liefert.

5) Aus N. 1. folgt dann noch, daß die allgemeine n^{te} Wurzel $\sqrt[n]{p+q\cdot i}$ ebenfalls n Werthe hat von derselben Form, und es wird gezeigt, wie dieselben gefunden werden. — Gleichzeitig

müssen die Gesetze des §. 15., nach denen mit Wurzeln gerechnet wird, für das Rechnen mit allgemeinen Wurzeln modificirt werden, wie wir solches im 9.–11. Kapitel für das Rechnen mit allgemeinen Quadrat-, Kubik- und vierten Wurzeln bereits gethan haben.

B. Außerdem hat der zweite Theil sich die Aufgabe zu stellen, den allgemeinsten Begriff der Potenz a^x zu geben. Während wir nämlich in dem gegenwärtigen ersten Theile den Begriff a^x nur für den Fall kennen gelernt haben, in welchem zwar a ganz allgemein gedacht ist, dagegen der Exponent x positiv oder negativ ganz oder 0 vorausgesetzt wurde, hat der zweite Theil den Begriff der Potenz a^x dahin zu erweitern, daß x beliebig reell oder imaginär (als auch beliebig positiv oder negativ gebrochen), ja selbst ein bloßer Träger des Operationszeichens sein kann. Gleichzeitig muß dann untersucht werden, ob die im gegenwärtigen ersten Kapitel aufgestellten Gesetze, nach denen mit Potenzen gerechnet wird für diese allgemeinsten Potenzen Modificationen erleiden, und welche.

C. Ferner hat zur Vervollständigung der hier begonnenen Lehren der zweite Theil dieses Werkes noch die allgemeineren Logarithmen zu betrachten, welche im Gegensatz zu den allgemeineren Potenzen sich von selbst ergeben. Man wird dann auch zu untersuchen haben, ob die hier in §. 15. aufgestellten Gesetze, nach denen mit Logarithmen gerechnet wird, Modificationen erleiden, und welche. Am Schlusse muß das, was §. 220. in Bezug auf die sechs Operationen gesagt ist, ebenso in Bezug auf alle sieben Operationen und zwar, auch wenn die drei letzteren in ihrer allgemeinsten Bedeutung aufgefaßt werden, sich wiederholen lassen.

B.

Die allgemeine Größenlehre.

Vierzehntes Kapitel.

Allgemeine Größenlehre.

Vorerinnerung.

Es ist nun Zeit, daß wir jetzt auch einmal zu einer Anwendung der bisherigen abstrakten Lehren der Zahlenlehre auf die Vergleichung der Größen übergehen, d. h. auf die Betrachtung der Art und Weise, wie Größen, die von anderen Größen auf eine bekannte Weise abhängen, mit Hilfe der Zahlenlehre und der dazu gehörigen Algebra näher und praktischen Zwecken gemäß bestimmt werden können. Eine nähere Kenntniß der Eigenschaften der Größen ist nöthig, um aus dem gegebenen Zusammenhange derselben Gleichungen zwischen (Zahlen-) Ausdrücken zu bilden. Mit diesen Ausdrücken wird dann nach den vorstehenden Gesetzen gerechnet, im Sinne des §. 9., und ohne daß man sich dabei um die Bedeutung der einzelnen Buchstaben zu bekümmern brauchte, — die unbekannten Ausdrücke werden zuletzt durch das in der Algebra beschriebene Verfahren gefunden, und diese letzteren gewinnen dann endlich erst wieder eine Bedeutung in Bezug auf die Größen, wenn nämlich der Zweck der „Rechnung" erreicht sein soll. — Dies alles gehörig deutlich nachzuweisen ist der Zweck dieses Kapitels.

§. 221.

Zuerst existiren nur ganze benannte Zahlen wie z. B. 6 ℔, 13 Ellen, 8 Rthlr., 100 Soldaten, u. s. w. — Sie heißen Größen (quantitates, quantitas). —

Die Zahlen (6, 13, 8, 100, ꝛc.) werden nun auch die unbenannten Zahlen genannt, im Gegensatz der benannten.

Die bestimmte Einheit in ihr heißt die Benennung.

Der begrenzte Raum, die begrenzte Zeit und die begrenzte Kraft können beliebig als n fache ihres n^{ten} Theiles ausgedrückt werden, d. h. als benannte Zahlen; daher heißen sie ebenfalls

schon Größen (quanta, quantum), auch wenn sie noch nicht als benannte Zahlen ausgedrückt sind. —

Anmerkg. Bei den Größen kommen folgende vier Punkte in Betrachtung

1) Man kann zwei oder mehr Größen (z. B. zwei oder mehr Haufen Getreide) in eine einzige (in einen einzigen Haufen) vereinigt denken.

Die einzelnen vereinigt gedachten Größen heißen die Theile des Ganzen.

2) Man kann von einer Größe einen Theil derselben hinweggenommen sich denken.

3) Man kann eine Größe vervielfachen, z. B. 8 mal, oder 47 mal, oder 2389 mal, u. s. w. f. nehmen, und alle mit einander zu einer Größe vereinigt denken.

4) Man kann eine Größe in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt denken.

Sind nun die gegebenen Größen als benannte Zahlen ausgedrückt, so kann man jedesmal verlangen, die in diesen vier Fällen neu erhaltene Größe ebenfalls als benannte Zahl auszudrücken.

Diese vier Aufgaben sind die einfachsten Aufgaben der allgemeinen Größenlehre.

§. 222.

Zwei Größen nennen wir gleiche, wenn sie beide durch eine und dieselbe benannte Zahl ausgedrückt werden können. — So kann ein Kreis einem Dreieck, eine Pyramide einem Prisma oder einer Kugel, u. s. w. f. gleich sein, und die Summe Geldes, welche der Eine in der Tasche an Thalern hat, gleich sein der Summe, welche ein anderer in Silbergroschen besitzt.

Wir können die Gleichheit der Größen durch dasselbe Zeichen (=) ausdrücken, durch welches wir in der Zahlenlehre die Gleich-

heit der Zahlformen (der Ausdrücke, d. h. der angezeigten Operationen) ausgedrückt haben, insoferne trotz der gänzlichen Verschiedenheit der Bedeutung oder vielmehr wegen der so auffallenden Verschiedenheit beider Begriffe eine Verwechslung derselben nie zu befürchten ist.

§. 223.

Sind zwei Größen als benannte Zahlen ausgedrückt, die einerlei Benennung haben, z. B. durch

$$aE \quad \text{und} \quad bE,$$

wo a und b wirkliche ganze Zahlen vorstellen, während E die gemeinschaftliche Benennung ist, (Rthlr., Elle, Fuß, u oder dergl.), so drückt die benannte Zahl $(a+b)E$ die Größe aus, welche durch Vereinigung der beiden in eine einzige (§. 221. Anmerkg. N. 1.) entsteht. Gleichzeitig drückt $(a-b)E$ die Größe aus, die übrig bleibt, wenn man von aE einen Theil wegnimmt, welcher der Größe bE gleich ist. Dies geht aus den Definitionen von $a+b$ und $a-b$ im §. 7. ohne Weiteres hervor.

Man sieht also, daß, um die beiden Aufgaben zu lösen, welche im §. 221. Anmerkg. NN. 1. und 2. und am Schlusse derselben Anmerkung bezeichnet sind, man nur nöthig hat die unbenannten Zahlen a und b zu addiren und zu subtrahiren.

§. 224.

Soll aber eine Größe aE (wo a eine wirkliche ganze Zahl ist) m mal genommen werden, so erhält man eine neue Größe, welche offenbar (nach §. 223.) durch die benannte Zahl

$$[a+a+a+a+\cdots(m \text{ mal})]E, \quad \text{also durch die}$$

benannte Zahl $(ma)E$ ausgedrückt ist. — Eine benannte Zahl aE wird also m mal genommen, wenn man die unbenannte Zahl a mit m multiplicirt (im Sinne des §. 7.) und die Benennung (E) beibehält.

So bekommt man (8·5) ℔. oder 40 ℔., wenn man 8 ℔. 5 mal nimmt; so hat man (9·200) Soldaten, d. h. 1800 Soldaten gesehen, wenn man 9 mal und jedesmal 200 Soldaten gesehen hat.

§. 225.

Wird aber eine Größe, welche durch die benannte Zahl aE ausgedrückt ist, wo a (positiv) ganz gedacht wird, — in m gleiche Theile getheilt gedacht, so ist jeder Theil durch die benannte Zahl $\frac{a}{m}E$ ausgedrückt, wenn nur $\frac{a}{m}$ wieder einer ganzen Zahl gleich ist, d. h. wenn nur a durch m (ohne Rest) theilbar ist; — weil außerdem $\frac{a}{m}E$, z. B. $\frac{40}{3}$ Soldaten jede Bedeutung verloren hätte.

Da unter den m^{ten} Theil einer Größe A diejenige Größe verstanden wird, welche m mal genommen die gegebene Größe A wieder hervorbringt, und da (nach §. 224.) das m fache von $\frac{a}{m}E$ die benannte Zahl $\left[m\cdot\frac{a}{m}\right]E$ d. h. (nach §. 10. I. 2.) die benannte Zahl aE wieder giebt, so ist die Behauptung außer allem Zweifel.

§. 226.

1) Ist eine Größe A durch Zusammenfassung zweier andern Größen B und C entstanden, so wird das m fache der Größe A erhalten, wenn man sowohl von B als auch von C die m fachen nimmt, und diese m fachen wieder zusammenfaßt.

2) Aber eben deshalb wird auch von der Größe A der m^{te} Theil erhalten, wenn man sowohl von B, wie von C den m^{ten} Theil nimmt und diese m^{ten} Theile (vorausgesetzt, daß sie wirklich existiren) wieder zusammenfaßt.

Denn das m fache der letztern Größe giebt (nach N. 1.) wieder die in eine einzige vereinten Größen B und C, nämlich A.

§. 227.

Man kann aber nun die gebrochene benannte Zahl einführen. — Da nämlich (nach §. 225.) $\frac{a}{m}E$ den m^{ten} Theil der benannten Zahl aE vorstellt, so oft $\frac{a}{m}$ ganz ist, — so wollen wir, mag $\frac{a}{m}$ ganz oder (im Sinne des §. 43.) gebrochen sein, unter der Form $\frac{a}{m}E$, — die noch immer benannte Zahl heißen mag, — stets den m^{ten} Theil der Größe aE uns denken, versteht sich unter der Voraussetzung, daß ein solcher Theil gedacht werden kann, d. h. existirt; denn was gar nicht existirt, kann natürlich auch nicht ausgedrückt werden.

Der Quotient $\frac{a}{m}$, mag er eine ganze oder eine gebrochene Zahl, also eine bloße Rechnungsform vorstellen, wird dann noch immer die unbenannte Zahl genannt.

Danach drückt also $\frac{2}{3}$ Rthlr. von nun an den dritten Theil von 2 Rthlr., also 20 Sgr. aus; eben so bedeutet von nun an $\frac{3}{4}$ ℔ den vierten Theil von 3 ℔, also 24 Loth. — Dagegen würde $\frac{2}{5}$ Soldat den fünften Theil von 2 Soldaten vorstellen, welcher an sich nicht existirt. Aber wohl kann man $\frac{2}{5}$ Mann Einquartirung bekommen, insoferne unter Mann die Summe Geldes verstanden wird, welche seine Verpflegung kostet, also unter $\frac{2}{5}$ Mann der 5^{te} Theil des Doppelten dieser Summe.

Anmerkung. Es muß aber nun vor Allem gezeigt werden, daß die Lösung aller in der Anmerkung zu §. 221. bezeichneten vier Aufgaben ganz genau so geschieht, wie sie in den §§. 223.–225. gegeben ist, die benannten Zahlen mögen ganze oder gebrochene sein. — Dies wird nun in dem nächsten Paragraphen geschehen.

§. 228.

1) Sind aE und bE zwei ganze oder gebrochene benannte Zahlen, so drückt (a+b)E noch immer (wie im §. 223.) die

neue Größe aus, welche aus der Vereinigung der beiden durch aE und bE vorgestellten Größen entsteht.

Ist nämlich $a = \frac{m}{n}$ und $b = \frac{p}{q}$, wo m, n, p und q beliebige ganze Zahlen sind, während $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ beliebig ganz oder gebrochen sein können, so ist

$$a = \frac{mq}{nq} \text{ und } b = \frac{np}{nq} \text{ und } a+b = \frac{mq+np}{nq};$$

und aE d. h. $\frac{mq}{nq}E$ ist nun der $(nq)^{te}$ Theil von $(mq)E$, sowie bE d. h. $\frac{np}{nq}E$ der $(nq)^{te}$ Theil von $(np)E$. — Werden nun diese beiden Größen aE und bE in eine einzige vereinigt gedacht, so ist solche (nach §. 226. N. 2.) der $(nq)^{te}$ Theil von den zu einer einzigen vereinigten Größen $(mq)E$ und $(np)E$, also von $(mq+np)E$, mithin (nach §. 227.) durch $\frac{mq+np}{nq}E$, d. h. durch $(a+b)E$ richtig ausgedrückt.

2) Eben so drückt, mögen a und b ganze oder gebrochene (unbenannte) Zahlen vorstellen, die benannte Zahl $(a-b)E$ allemal die Größe aus, welche übrig bleibt, wenn man von der Größe aE einen Theil bE hinwegnimmt, genau wie im §. 223.

Denn der hinweggenommene Theil bE muß mit dem übrig bleibenden Theil zusammengefaßt, das Ganze aE wieder geben, und dies ist (nach N. 1. und nach §. 20. N. 2.) der Fall, wenn wir den übrig bleibenden Theil durch $(a-b)E$ ausdrücken.

3) Mag aE eine ganze oder gebrochene benannte Zahl sein, so drückt die benannte Zahl $(ma)E$ allemal die Größe aus, welche als das m fache der Größe aE gedacht wird; genau wie im §. 224.

Denn, ist $a = \frac{p}{q}$, so ist $ma = m\frac{p}{q} = \frac{mp}{q}$ (nach §. 37);

also drückt (ma)E d. h. $\frac{mp}{q}E$ den q^{ten} Theil von (mp)E aus (nach §. 227.). — Auf der andern Seite ist aE oder $\frac{p}{q}E$ der q^{te} Theil von pE; also ist das m fache von aE, das m fache von dem q^{ten} Theile von pE, d. h. (nach §. 226. N. 2.) der q^{te} Theil von dem m fachen von pE, d. h. der q^{te} Theil von (mp)E, — also dasselbe, was auch (ma)E ausdrückt.

4) Mag aE eine ganze oder eine gebrochene benannte Zahl sein, so drückt $\frac{a}{m}E$ stets den m^{ten} Theil dieser Größe aE aus; genau wie im §. 225. aber ohne die dortige Beschränkung, und darf man nur den dort geführten Beweis hier wiederholen.

Anmerkung. Die vier Haupt-Aufgaben der allgemeinen Größenlehre lösen sich also genau so, wie wenn die benannten Zahlen alle, ganze benannte Zahlen wären, obgleich sie jetzt ganz oder gebrochen sein können; und bei diesen Lösungen hat man immer nur nöthig, mit den unbenannten Zahlen zu „rechnen" und zwar genau nur in dem Sinne des §. 9.

§. 229.

Da $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$ ist, so ist das m fache der benannten Zahl $\frac{1}{n}E$ allemal (nach §. 228. N. 3.) nichts weiter als $\left(m \cdot \frac{1}{n}\right)E$ d. h. nichts weiter als $\frac{m}{n}E$. — Es ist also die gebrochene Zahl $\frac{m}{n}E$ nicht bloß (nach der Definition des §. 227.) der n^{te} Theil von dem m fachen der Einheit E, sondern zu gleicher Zeit der n^{te} Theil der Einheit E, m mal genommen. — Es erscheint also die gebrochene benannte Zahl $\frac{m}{n}E$ als eine

ganze benannte Zahl mF, wenn unter der neuen Einheit F der n^{te} Theil der alten Einheit E verstanden wird.

So ist $\frac{3}{4}$ Elle nichts anders als 3 Viertels-Ellen.

Anmerkung. Während also die gebrochene unbenannte Zahl $\frac{m}{n}$ nichts weiter ist, als eine angezeigte Division, d. h. nichts weiter als eine Rechnungsform (ein Ausdruck), welche die Eigenschaft vorstellt, mit n multiplicirt, m zu geben, d. h. jeden Ausdruck, der diese Eigenschaft hat, — stellt die gebrochene benannte Zahl $\frac{m}{n}E$ den n^{ten} Theil der Einheit E, m mal genommen, vor, oder auch (nach §. 227.) den n^{ten} Theil der m fachen Einheit E, folglich eine Größe, wenn nur dieser n^{te} Theil möglich ist.

Bis jetzt hat man, um die vier ersten Aufgaben der allgemeinen Größenlehre zu lösen, nur nöthig gehabt, mit unbenannten Zahlen, also mit denjenigen Rechnungsformen zu rechnen (nach §. 9.), mit welchen nach Vorschrift der vorhergehenden Kapitel der Zahlenlehre gearbeitet oder gerechnet wird.

§. 230.

Die Größe A heißt $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ als eine andere Größe B, wenn, nachdem beide Größen als benannte Zahlen ausgedrückt sind, die sich auf eine gemeinschaftliche Einheit beziehen, etwa bezüglich durch

$$aE \quad \text{und} \quad bE,$$

dann die unbenannte Zahl a (im Sinne des §. 45.) $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ ist, als die unbenannte Zahl b.

Die nach dieser Definition kleiner genannte Größe B ist allemal ein Theil der größern A, eben weil (nach §. 45.) a—b positiv ganz oder gebrochen ist, folglich (nach §. 220. N. 2.)

die benannte Zahl $(a-b)E$ den andern Theil ausdrückt, der mit bE oder B zusammengefaßt, das Ganze aE oder A wieder giebt.

§. 231.

Eine und dieselbe Größe A kann auf die mannigfaltigste Weise als benannte Zahl ausgedrückt werden; denn so wie man die Benennung eine andere werden läßt, so wird auch die zugehörige unbenannte Zahl eine andere.

Man unterscheidet **höhere** und **niedere** Einheiten (Benennungen), während die höhere ein Vielfaches der niedrigern Benennung ist.

Ist E eine höhere und F eine niedere Einheit und ist dabei

$$E = mF,$$

wo m die **Verhältnißzahl** genannt wird, indem man das Zeichen ($=$) hier als Gleichheit der Größen vorstellend ansieht, — so ist

$$1) \qquad aE = (ma)F$$

und

$$2) \qquad bF = \frac{b}{m}E;$$

d. h. eine Zahl a höherer Einheiten E, wird auf niedrigere Einheiten F gebracht, wenn man die unbenannte Zahl a mit der **Verhältnißzahl** m multiplicirt; und eine Zahl b niederer Einheiten F, wird auf höhere Einheiten E gebracht, wenn man die unbenannte Zahl b durch die Verhältnißzahl m dividirt.

So ist

18 Rthlr. $= (18 \cdot 30)$ Sgr. $= 540$ Sgr.;

240 Pfge. $= \frac{240}{12}$ Sgr. $= 20$ Sgr. $= \frac{20}{30}$ Rthlr. $= \frac{2}{3}$ Rthlr.;

$\frac{3}{4}$ ℔ $= (\frac{3}{4} \cdot 32)$ Loth $= 24$ Loth;

20 Loth $= \frac{20}{32}$ ℔ $= \frac{5}{8}$ ℔;

u. s. w. f. — Es ist aber auch

$2\frac{3}{4}$ ℔ $= [(2+\frac{3}{4})32]$ Loth $= 88$ Loth;

248 Pfge. $= \frac{248}{12}$ Sgr. $= 20\frac{2}{3}$ Sgr. $= \frac{248}{12 \cdot 30}$ Rthlr. $= \frac{31}{45}$ Rthlr.

Der Beweis ist leicht zu führen. Ist nämlich $a = \frac{p}{q}$ ganz oder gebrochen, so ist aE (nach §. 227.) der q^{te} Theil von dem p fachen von E; nun ist aber das p fache von E, d. h. das p fache von mF (nach §. 224.) nichts anders als die benannte Zahl $(pm)F$; folglich ist der q^{te} Theil davon (nach §. 228. N. 4.) durch $\frac{pm}{q}F$ also auch durch $\left(\frac{p}{q}\cdot m\right)F$ d. h. durch $(am)F$ ausgedrückt; folglich ist $aE = (am)F$.

Und deshalb ist auch $\frac{b}{m}E = \left(\frac{b}{m}\cdot m\right)F = bF$; wodurch die N. 2. erwiesen ist.

Dieser Beweis gilt auch noch, wenn m eine gebrochene Zahl ist.

Ist also

$$1 \text{ Elle} = \frac{17}{8} \text{ Fuß},$$

so machen

$$30 \text{ Ellen} = \left(30\cdot\frac{17}{8}\right) \text{ Fuß} = \frac{510}{8} \text{ Fuß} = 63\tfrac{3}{4} \text{ Fuß};$$

und

$$\tfrac{3}{4} \text{ Elle} = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{17}{8}\right) \text{ Fuß} = \frac{51}{32} \text{ Fuß} = 1\tfrac{19}{32} \text{ Fuß}.$$

§. 232.

Gewöhnlich pflegt man eine Größe A zunächst in eine höhere Einheit E als benannte Zahl auszudrücken, einen Rest der kleiner als die Einheit E ist, in eine niedrigere Einheit F, und wenn von der Größe A nun noch ein Rest bleibt, der noch kleiner als F ist, so drückt man diesen dann in noch niedrigere Einheiten aus, während die ganze Größe aus allen Theilen zusammen genommen besteht.

So drückt man also eine Summe Geldes aus

durch 84 Rthlr. 19 Sgr. 8 Pf.

ein Gewicht durch 5 Ctr. 87 ℔. 23 Loth

eine Länge durch $28° \; 7' \; 5'' \; 3'''$

eine Fläche durch $13\square° \; 97\square' \; 120\square''$ u. s. w. f.

Einen solchen Ausdruck nennt man eine zusammengesetzte benannte Zahl, der dann die einfache benannte Zahl gegenüber liegt.

Es ist nun leicht,

a) jede zusammengesetzte benannte Zahl in eine einfache umzuwandeln, z. B.

$$8 \text{ Rthlr. } 17 \text{ Sgr. } 6 \text{ Pf.} = (8{\cdot}30{\cdot}12 + 17{\cdot}12 + 6) \text{ Pfge.}$$

$$= [(8{\cdot}30 + 17){\cdot}12 + 6] \text{ Pfge.} = 3090 \text{ Pf.} = \frac{3090}{12} \text{ Sgr.}$$

$$= 257\tfrac{1}{2} \text{ Sgr.} = \frac{257\frac{1}{2}}{30} \text{ Rthlr.} = \frac{515}{60} \text{ Rthlr.} = \frac{103}{12} \text{ Rthlr.}$$

$$= 8\tfrac{7}{12} \text{ Rthlr.};$$

b) jede einfache benannte Zahl (im Falle die Aufgabe überhaupt eine Lösung zuläßt) in eine zusammengesetzte benannte Zahl umzuformen.

$$\text{Z. B.}\quad 2357 \text{ Loth} = \frac{2357}{32} \text{ ℔} = 73 \text{ ℔ } 21 \text{ Loth.}$$

Anmerkung. Man kann nun von einer zusammengesetzten benannten Zahl ein Vielfaches nehmen, indem man das Vielfache von jedem Theil nimmt; eben so kann man von ihr den n^{ten} Theil nehmen, indem man von dem Gliede der höchsten Benennung den n^{ten} Theil nimmt, dann den Rest zu dem Gliede der niederern Benennung hinzunimmt und davon wieder den n^{ten} Theil nimmt, und so fortfährt, bis man von dem Ganzen den n^{ten} Theil genommen hat.

§. 233. Erklärung.

Sind A und B zwei Größen und E irgend eine gemeinschaftliche Einheit, so daß

$$A = aE \quad \text{und} \quad B = bE \quad \text{ist,}$$

wo a und b ganze oder gebrochene Zahlen sein mögen, so heißen a und b die Verhältnißzahlen der Größen A und B;

und man sagt auch es verhalte sich A zu B, wie a zu b; und man drückt dies wohl auch so aus

$$A:B = a:b.$$

§. 234.

1) Wenn man beide Verhältnißzahlen a und b durch eine und dieselbe Zahl m multiplicirt oder dividirt, so sind die Resultate am und bm oder $\frac{a}{m}$ und $\frac{b}{m}$ immer wieder zwei Verhältnißzahlen derselben Größen A und B.

Denn denkt man sich Einheiten E_1 und E_2, so daß

$$E = mE_1 \quad \text{und} \quad E = \frac{1}{m}E_2 \quad \text{ist,}$$

so ist $$A = aE = (am)E_1 = \frac{a}{m}E_2$$

und $$B = bE = (bm)E_1 = \frac{b}{m}E_2,$$

woraus die Behauptung ersichtlich ist.

2) Der Quotient zweier Verhältnißzahlen bleibt daher für dieselben Größen immer derselbe, auf welche gemeinschaftliche Einheit sie sich auch beziehen.

Denn es ist ja, nach (§. 37. N. 28.)

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{a:m}{b:m}.$$

3) Verhalten sich zwei Größen A und B, wie zwei gegebene Zahlen a und b, d. h. ist

$$A:B = a:b,$$

so ist allemal

$$bA = aB, \quad \frac{b}{a}A = 1B \quad \text{und} \quad 1A = \frac{a}{b}B.$$

Denn, da $A = aE$ und $B = bE$ ist,

so ist $$bA = (ab)E \quad \text{und} \quad aB = (ab)E,$$

also $$bA = aB.$$

Beispiele. Hat man also z. B. für den Preußischen und Pariser Fuß die Verhältnißzahlen

13913 und 14400,

so hat man

14400 Preuß. Fuße = 13913 Paris. Fuße;

und auch

1 Preuß. Fuß = $\frac{13913}{14400}$ Pariser Fuß

und 1 Pariser Fuß = $\frac{14400}{13913}$ Preuß. Fuß.

§. 235. Erklärung.

Vier Größen A, B, C, D sagt man, stehen in (geometrischer) Proportion, oder bilden eine (geometrische) Proportion, wenn die Verhältnißzahlen von A und B, und die von C und D gleiche Quotienten bilden. Die Proportion heißt stetig, wenn ihre beiden mittlern Glieder B und C einander gleich sind.

Und sagt man: „Die Größe A verhält sich zu B, wie C zu D", so versteht man darunter, daß A, B, C, D in Proportion stehen.

§. 236.

Da die Quotienten der Verhältnißzahlen (nach §. 234. N. 2.) immer dieselben bleiben, auf welche gemeinschaftliche Einheit sie bezogen sein mögen, so kann man für die Größen A und B, den Quotienten ihrer Verhältnißzahlen bequem durch

$$A:B \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} \quad \text{ausdrücken,}$$

indem man sich nun unter A und B nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre, auf irgend eine gemeinschaftliche Einheit bezogenen Verhältnißzahlen vorgestellt denkt.

Daß A, B, C, D eine Proportion bilden, kann nun so geschrieben werden

$$A:B = C:D \quad \text{oder} \quad \frac{A}{B} = \frac{C}{D},$$

wenn man nur auch in dem Quotienten C:D oder $\frac{C}{D}$, unter C und D nicht mehr die Größen selbst, sondern ihre Verhältnißzahlen, die sich auf eine völlig beliebige (aber gemeinschaftliche) Einheit beziehen können, vorgestellt sich denkt.

In diesem Sinne hat man natürlich auch noch

$$A \cdot D = B \cdot C$$

und

$$A = \frac{BC}{D}, \quad D = \frac{BC}{A}, \quad B = \frac{AD}{C} \text{ und } C = \frac{AD}{B};$$

so wie auch noch

$$A:C = B:D$$

$$C:A = D:B$$

$$B:A = D:C$$

u. s. w. f.

§. 237. Lehrsatz.

Ist die Größe M von den Größen A und B, dagegen N von C und D so abhängig, daß, so oft A und C dieselben werden, sich M zu N verhalten muß, wie B zu D, und so oft B und D dieselben werden, sich M zu N verhält, wie A zu C, — so ist, wenn weder $A = C$ noch $B = D$ gedacht wird

$$M:N = (A \cdot B):(C \cdot D),$$

wenn man nur unter M, N, und A, C, und B, D nicht mehr die Größen selber, sondern ihre Verhältnißzahlen sich denkt.

Beispiele. 1) Ist gezeigt worden, daß Rechtecke M und N von ihren Grundlinien A und C und von ihren Höhen B und D, auf die vorbeschriebene Weise wirklich abhängen, so gilt für sie der vorstehende Lehrsatz, und aus ihm geht also hervor, daß sich dann auch die Rechtecke, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe verhalten.

2) Ist nachgewiesen worden, daß zwei, durch den Stoß bewegter Körper hervorgebrachte Wirkungen M und N, sich ver-

halten müßten, wenn die Geschwindigkeiten A und C dieselben wären, wie die Massen B und D, und wenn die Massen B und D dieselben wären, wie die Geschwindigkeiten A und C; so lehrt uns dieser Lehrsatz, daß sich diese Wirkungen verhalten, wie die Produkte aus den Massen in die Geschwindigkeiten.

3) Zinsen M und N zweier in den Zeiten A und C zu demselben Zinsfuß ausgeliehener Kapitalien B und D, verhalten sich, wenn für sie die obigen Voraussetzungen stattfinden, ebenfalls wie die Produkte aus den Kapitalien mit den Zeiten multiplicirt.

Beweis. Denn es sei P eine mit M und N gleichartige Größe,

und so, daß P von A und D
abhängt, wie M von A und B
und wie N von C und D,

so hat man, nach den beiden Voraussetzungen,

$$M:P = B:D,$$

und $$P:N = A:C;$$

also, wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt,

$$(M \cdot P):(N \cdot P) = (A \cdot B):(C \cdot D).$$

und (nach §. 37. N. 28.), auch

$$M:N = (A \cdot B):(C \cdot D).$$

§. 238.

Hängt M von A, B und C, und N von D, E und F so ab, daß sich M zu N verhalten müßte, wie A zu D, oder wie B zu E, oder wie C zu F, so oft die beiden anderen Paare dieselben wären, so ist allgemein

$$M:N = (A \cdot B \cdot C):(D \cdot E \cdot F),$$

wenn nur in dieser Gleichung unter M, N, A, D, B, E, C und F nicht mehr die Größen selber, sondern ihre Verhältnißzahlen gedacht werden.

Beispiele. 1) Ist gezeigt worden, daß rechtwinkliche Parallelepipeda M und N, so oft je zwei ihrer 3 Kanten dieselben sind, sich immer wie das dritte Paar Kanten verhalten müssen, so lehrt uns dieser Lehrsatz, daß diese Parallelepipeda sich wie die Produkte dieser 3 Kanten verhalten.

2) Zinsen M und N hängen von den Kapitalien A und D, von den Zeiten des Ausstehens B nnd E, endlich von dem Zinsfuße C und F, so ab, wie es die Voraussetzungen des Lehrsatzes verlangen, also lehrt uns dieser Satz, daß sich diese Zinsen allemal verhalten müssen, wie die Produkte aus den Kapitalien in die Zeiten und in den Zinsfuß multiplicirt.

Beweis. Man denke sich eine mit M und N gleichartige Größe, so daß

P von A, B und F

so abhängt, wie M von A, B und C,

und wie N von D, E und F,

so ist (nach den Voraussetzungen und nach §. 237.)

$$M:P = C:F$$

und $$P:N = (A \cdot B):(D \cdot E);$$

also, wenn man multiplicirt,

$$(MP):(NP) = M:N = (A \cdot B \cdot C):(D \cdot E \cdot F).$$

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, wie sich diese letztern Sätze nach Belieben noch erweitern lassen. Zugleich fällt in die Augen, daß aus den Gleichungen der §§. 236.–238. allemal eine der Verhältnißzahlen gefunden werden kann, wenn die übrigen gegeben sind; und daß diese Verhältnißzahl auf dieselbe Einheit bezogen werden muß, auf welche die andere, mit ihr das Verhältniß bildende Größe sich bezieht, um eine der Größen aus den übrigen durch Rechnung gefunden zu haben.

Die Anwendung dieser Lehrsätze der §§. 236.–238.) und der folgenden, hier nicht weiter hingeschriebenen, um aus 3 gegebenen Größen die 4te, oder aus 5, 7, 9, ꝛc. gegebenen Grö-

ßen die 6te, 8te, 10te, ꝛc. zu finden, bilden die Regula de tri, de quinque, de septem, de novem, ꝛc. ꝛc. im Allgemeinen die Kettenregel, und somit den wichtigsten Theil der gemeinen Rechenkunst. Und diese Aufgaben bilden wieder die Grundlage aller übrigen zusammengesetztern Aufgaben der Größenlehre, derjenigen nämlich, welche man gewöhnlich algebraische Aufgaben nennt.

§. 239. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen-Verhältnisse einander gleich

$$A:B = C:D = E:F = G:H = \text{ꝛc. ꝛc.},$$

so verhält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie ein beliebiges Vorderglied zu seinem Hintergliede; d. h. es ist dann allemal

$$(A+C+E+G):(B+D+F+H) = A:B = C:D = \text{ꝛc.}$$

Beweis. Denn es ist nach den Voraussetzungen

$$\begin{aligned} A:A &= B:B \\ C:A &= D:B \\ E:A &= F:B \\ G:A &= H:B \\ \text{ꝛc.} &\quad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

also, wenn man links und rechts addirt

$$(A+C+E+G):A = (B+D+F+H):B$$

d. h. $(A+C+E+G):(B+D+F+H) = A:B.$

Anmerkung. Dieser Satz gibt in seiner Anwendung die Gesellschafts- und die Theilungs-Rechnung.

§. 240. Aufgabe.

Aus gegebenen Größen d. h. benannten Zahlen, andere, von diesen abhängige Größen (benannte Zahlen) zu finden.

Auflösung 1. Man drücke alle Größen, die gegebenen sowohl, als die gesuchten, als benannte Zahlen aus, die sich,

wo möglich, paarweise auf einerlei beliebig anzunehmende Einheit beziehen; die gegebenen Größen werden dann durch gegebene unbenannte Zahlen, die gesuchten dagegen durch unbekannte unbenannte Zahlen x, y, z, ꝛc. vorgestellt.

2) Die Art der Abhängigkeit der Größen von einander muß es möglich machen, daß eine oder mehrere Größen auf doppelte Art als benannte Zahl ausgedrückt werden können. Zwei Ausdrücke aber, welche unbenannte Zahlen sind, und auf einerlei Einheit bezogen, dieselbe Größe doppelt ausdrücken, müssen dieselbe ganze oder gebrochene Zahl vorstellen, also einander gleich sein.

3) Verschafft man sich auf diese Weise so viele Gleichungen, als unbekannte unbenannte Zahlen x, y, z, ꝛc. vorkommen, so darf man nur diese Gleichungen nach diesen Unbekannten x, y, z, ꝛc. auflösen, um nachher unter allen gefundenen Werthen der letztern, welche diesen Gleichungen genügen, diejenigen absondern zu können, welche zugleich auch allen übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen, auch denen, die nicht in den gebildeten Gleichungen ausgesprochen sind. Diese Werthe der Unbekannten x, y, z, ꝛc. allein, sind dann als die wahren Auflösungen der Aufgabe anzusehen, wenn man sie auf die vorher schon für sie festgesetzte Einheit bezieht, d. h. als benannte Zahl (Größe) nimmt.

Anmerkung 1. Es sind oft eigene Kenntnisse nöthig, welche zum Theil in der Raumgrößenlehre, zum Theil in der Kraftgrößenlehre, überhaupt aber in allen Zweigen der besondern Größenlehre gelehrt werden müssen, um eine Größe einmal, oder noch einmal, als benannte Zahl, aus andern benannten Zahlen zusammengesetzt zu erhalten; d. h. um die Gleichungen anzusetzen. Für viele einfache, im Leben vorkommende Fälle, reichen die Sätze der §§. 236.—239. aus, um die Gleichungen augenblicklich zu haben. Solche einfachere, in der vorliegenden allgemeinen Aufgabe enthaltenen Fälle, heißen

dann Aufgaben der gemeinen Rechenkunst, während die mehr verwickelten hieher gehörigen Fälle die algebraischen Aufgaben bilden. Diese letztern heißen dann wohl auch wieder geometrisch-algebraische Aufgaben, wenn sie sich vorzüglich mit Raumgrößen beschäftigen.

Anmerkung 2. Dem Anfänger sind nachstehende Punkte nicht genugsam zu empfehlen:

1) Nie rechnet man mit Größen, sondern immer nur mit unbenannten Zahlen.

2) Der Unbekannte x, welcher gesucht wird, kann nie eine Größe sein, sondern ist immer eine unbenannte Zahl, eine ganze oder gebrochene, welche sich bereits auf eine bestimmte angenommene Einheit bezieht. Man sucht z. B. in der Rechnung nie eine Linie, oder eine Summe Geldes, oder dergl.; sondern eine Zahl x von Fußen, oder eine Zahl z von Zollen, oder eine Zahl y von Thalern, oder eine Zahl v von Groschen, u. s. w. Ob man aber die unbenannte Zahl x von Fußen, oder die unbenannte Zahl z von Zollen, derselben Linie suchen wolle, darüber hat man sich vorher bereits entscheiden müssen, und man konnte die Gleichung zwischen diesen unbenannten Zahlen, aus welcher nachgehends x oder z gefunden werden mußte, nicht eher erhalten, als bis man sich darüber entschieden gehabt hatte.

3) Aber eben weil man sich vorher bereits entschieden haben muß, ob man die Zahl x von Fußen oder die Zahl z von Zollen (um bei diesem Beispiele zu bleiben) gefunden wissen wolle, welche beide dieselbe gesuchte Linie ausdrücken, und weil man sich solches notirt haben muß, so kann man nachher nie mehr darüber im Zweifel sein.

4) Die Einheit, ob Fuß oder Zoll, ob Thaler oder Groschen, ob Centner oder Pfund, auf welche man die gegebenen und die gesuchten Größen beziehen will, kann nie mit zu den gesuchten Stücken gehören, sondern wird immer ganz will-

kürlich angenommen, oder gegeben, und jedesmal wird nur die unbenannte Zahl x, oder z, oder 2c. 2c. dazu gesucht, welche auf diese bestimmte aber beliebig gewählte Einheit bezogen, die gesuchte Größe selbst geben muß.

§. 241.

Da zwar jedes Maaß (unbenannte Zahl), welches der Aufgabe zwischen den Größen Genüge leistet, auch den Gleichungen Genüge leisten muß; aber nicht umgekehrt, jeder Werth der Unbekannten, welcher den Gleichungen Genüge leistet, auch die Aufgabe löset; in so fern er nicht bloß den Bedingungsgleichungen der Abhängigkeit genügen muß, sondern auch den andern nicht in Gleichung gestellten Eigenschaften des gesuchten Maaßes, so ergeben sich sogleich noch folgende Sätze:

1) Die Werthe der Unbekannten, welche den Gleichungen entsprechen, aber nicht zugleich absolute ganze oder gebrochene Zahlen sind, können die gegebene Aufgabe nie lösen, weil jedes gesuchte Maaß einer Größe nothwendig eine ganze oder gebrochene absolute Zahl sein muß. Solche Werthe die nicht absolute Zahlen sind, können daher ohne Weiteres verworfen werden. (Also die negativen Werthe, so gut wie die imaginären; und diese wieder so gut wie die Nullenwerthe).

2) Aber auch diejenigen Werthe, welche absolute Zahlen sind, und sich für die Unbekannten durch Auflösung der Bedingungsgleichungen ergeben, müssen nicht nothwendig die Aufgabe lösen, sondern diese Nothwendigkeit tritt nur dann erst ein, wenn dieselben Zahlen auch noch den übrigen Bedingungen der Aufgabe, die nicht in Gleichung gestellt sind, genügen.

3) Geben daher die Gleichungen, in so ferne sie höhere oder gar transcendente Gleichungen sind, für die Unbekannten mehrere oder gar unendlich viele Werthe; sind ferner unter diesen, mehrere oder alle, absolute ganze oder gebrochene Zahlen, so kann die Aufgabe mehrere Auflösungen, kann aber eben so gut auch gar keine Auflösung haben, in so ferne mehrere, in so

ferne aber auch gar keiner der absoluten Werthe der Unbekannten, den übrigen nicht in Gleichung gestellten Bedingungen der Aufgabe entsprechen können.

4) Ist aber keiner der Werthe der Unbekannten, die man durch die Auflösung der Gleichungen erhält, eine absolute ganze oder gebrochene Zahl, so hat nothwendig die Aufgabe, welche zu dieser Gleichung geführt hat, gar keine Auflösung; d. h. es gibt dann keine Größe oder keine Größen, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisteten.

5) Mehr Auflösungen einer Aufgabe als aus den aufgelösten Gleichungen hervorgehen, kann die Aufgabe, die zu diesen Gleichungen geführt hat, nie haben.

Anmerkung. Man übersehe aber den Umstand, daß die Auflösungen der Gleichungen nur dann Auflösungen der Aufgabe der Größenlehre geben, wenn solche auch noch den übrigen Bedingungen der Aufgabe entsprechen, ja nicht. — Eben so wenig übersehe man, daß alle Maaße der Größen absolute ganze oder gebrochene Zahlen sein müssen.

Beispiel 1. Das ℔ Chokolade wird mit 18 gGr. verkauft. Hieraus erwächst für den Verkäufer ein Gewinn von $12\frac{1}{2}$ Procent. Wie viel hat der Centner dieser Chokolade gekostet. (Den Rthlr. zu 24 gGr. und den Centner zu 110 ℔ gerechnet).

Auflösung. Es sei x die Zahl der Thaler, welche der Centner gekostet hat, so ist $\frac{12\frac{1}{2}}{100}x$ die Zahl der Thaler, welche am Centner gewonnen wird; also $x+\frac{12\frac{1}{2}}{100}x$ die Zahl der Thaler, um welche der Centner verkauft worden.

Da nun 1 ℔ zu $\frac{3}{4}$ Rthlr. verkauft worden ist, so wurde der Centner zu $\frac{3}{4}\cdot 110$ Rthlr. verkauft. Also hat man die Verkaufssumme des Centners doppelt als eine Zahl von Thalern

ausgedrückt, einmal durch $\left(x+\frac{12\frac{1}{2}}{100}x\right)$ Rthlr. und das anderemal durch $(\frac{3}{4}\cdot 110)$ Rthlr.; folglich hat man die Gleichung

$$x+\frac{12\frac{1}{2}}{100}x=\tfrac{3}{4}\cdot 110,$$

zwischen den unbenannten Zahlen; und diese Gleichung aufgelöst, gibt

$$x=73\tfrac{1}{3}.$$

Mithin hat der Centner $73\frac{1}{3}$ Rthlr. gekostet.

Beispiel 2. Von zwei Courieren X und Z soll der erstere X den andern Z, welcher bereits b volle Tage früher, auch von einem Orte Q ausgereist ist, welcher um a Meilen näher liegt, als der Ort P, von welchem X ausreist, einholen und zwar gerade in der Stadt R, welche von dem Orte P um d Meilen abliegt. Der Courier Z macht n Meilen in m Stunden. Wie schnell muß der Courier X reisen?

Auflösung. Es sei x die Zahl der Meilen, welche der Courier X täglich, oder y die Zahl der Meilen, welche derselbe in jeder Stunde zurücklegen muß.

Nun ist

d die Zahl der Meilen der Entfernung PR,
also des Weges von X;

d—a die Zahl der Meilen der Entfernung QR
d. h. des Weges von Z;

also ist $\frac{d\cdot 24}{x}$ oder $\frac{d}{y}$ die Zahl der Stunden,
welche X zu seiner Reise braucht;

und $\frac{(d-a)m}{n}$ die Zahl der Stunden, welche Z zu
seiner Reise braucht.

Da nun Z um b volle Tage, also um 24·b Stunden frü-

her abgereiset ist, als X, beide aber zu gleicher Zeit zusammentreffen, so ist

$\frac{24 \cdot d}{x} + 24b$ oder $\frac{d}{y} + 24b$ ebenfalls die Zahl der Stunden, welche Z braucht.

Und weil man nun für die letztere Zeit zwei Ausdrücke hat, so sind letztere beiden einander gleich; also hat man die Gleichung

$$\frac{(d-a)m}{n} = \frac{24d}{x} + 24b;$$

oder die Gleichung

$$\frac{(d-a)m}{n} = \frac{d}{y} + 24b;$$

aus denen

$$x = \frac{24dn}{(d-a)m - 24bn},$$

oder $$y = \frac{dn}{(d-a)m - 24bn}$$

folgert; während x die Zahl der Meilen ist, welche X täglich, y dagegen die Zahl der Meilen, welche er stündlich macht.

Beispiel 3. Auf der Peripherie eines Kreises, welche in 360 Theile (Grade genannt) getheilt ist, bewegen sich zwei Punkte; der eine A macht in einer Minute 6 Grade, der andere B in einer Stunde 30 Grad. Jetzt steht A um 45 Grad hinter B. Wann wird A den B zum erstenmale, wann zum zweitenmale, wann zum drittenmale, u. s. w. f. einholen?

Auflösung. Es sei x die Zahl der Minuten, y aber die Zahl der Stunden, welche A braucht, um den B zum erstenmale einzuholen; so stellt 6x oder 6·60·y die Zahl der Grade vor, welche A unterdessen auf der Peripherie durchläuft, während $\frac{30 \cdot x}{60}$ oder 30·y die Zahl der Grade, welche unterdessen B auf der Peripherie durchläuft, vorstellt.

Nun hat aber A die 45 Grade, um welche er gegen B zurück liegt, offenbar mehr durchlaufen müssen, als B, so daß auch die Zahl seiner durchlaufenen Grade durch

$$\frac{30x}{60}+45 \quad \text{oder} \quad 30y+45$$

vorgestellt sein wird; also daß man hat die Gleichung

$$6x=\frac{30x}{60}+45;$$

oder die Gleichung

$$6 \cdot 60 \cdot y = 30 \cdot y + 45;$$

woraus sich

$$x=\frac{45 \cdot 60}{330}=\tfrac{90}{11}=8\tfrac{2}{11}$$

oder $y=\frac{45}{330}=\frac{3}{22}$ ergibt.

Nennt man nun z die Zahl der Stunden, welche A braucht, um B zum zweitenmale einzuholen, so ändert sich bloß, wenn z statt des bisherigen y gesetzt wird, der zu machende Weg des A, der jetzt um die ganze Kreislinie, also um 360 Grade größer ist als der von B, so daß man jetzt die Gleichung hat

$$6 \cdot 60 \cdot z = 30 \cdot z + 45 + 360,$$

mithin

$$z=\tfrac{405}{330}=1\tfrac{5}{22}.$$

Und die Gleichung

$$6 \cdot 60 \cdot v = 30 \cdot v + 45 + 2 \cdot 360$$

gibt $v=2\frac{7}{22}$,

als die Zahl der Stunden, welche A braucht, um B zum drittenmale einzuholen. — U. s. w. f.

Beispiel 4. Wieviel Vier- und wieviel Sechs-Groschen-Stücke muß man nehmen, um mit 17 Stücken 3 Rthlr. 18 gGr. zu bezahlen?

Auflösung. Es sei x die Zahl der Viergroschenstücke, y die Zahl der Sechsgroschenstücke, so ist 4x die Zahl der Gro-

schen, welche die erstern, und $6y$ die Zahl der Groschen, welche die andern betragen, so wie $x+y$ die Zahl aller Stücke und $4x+6y$ die Zahl aller Groschen, welche sie betragen, während erste Zahl auch durch 17, letztere dagegen durch $3 \cdot 24+18$ vorgestellt ist. Man hat daher die beiden Gleichungen

$$1)\quad x+y=17 \quad \text{und} \quad 4x+6y=90 \quad \text{oder} \quad 2)\quad 2x+3y=45;$$

$$\text{also} \qquad x=6 \quad \text{und} \quad y=11.$$

Beispiel 5. Wie groß ist der Halbmesser einer concentrisch hohlen Kugel (einer Bombe) von Gußeisen, bei welcher die Eisen-Lage ringsherum a Zoll dick ist, welche b ℔ wiegt, und unter der Voraussetzung, daß ein Kubikfuß Wasser $\frac{3}{5}$ Centner, das Gußeisen dagegen $7\frac{1}{5}$ mal so viel wiegt, endlich daß ein Fuß 12 Zoll und ein Kubikfuß 1728 Kubikzoll hat?

Auflösung. Bedeutet R die Zahl der Zolle des gesuchten Halbmessers und r die Zahl der Zolle des Halbmessers der hohlen Kugel, so wird aus der Geometrie als bekannt vorausgesetzt, daß der Inhalt der ganzen Kugel $\frac{4}{3}R^3\pi$ Kubikzolle, und der hohlen Kugel $\frac{4}{3}r^3\pi$ Kubikzolle, also der Inhalt der Eisen-Lage

$$\tfrac{4}{3}R^3\pi-\tfrac{4}{3}r^3\pi \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$$

ist, unter π die Zahl $3,14159\cdots$ verstanden, welche die Länge der halben Kreislinie ausdrückt, deren Radius 1 ist. Da nun ein Kubikfuß Eisen $7\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}$ d. h. $\frac{108}{25}$ Centner, also $\frac{108 \cdot 110}{25}$, d. h. $\frac{108 \cdot 22}{5}$ ℔ wiegt, so wiegt ein Kubikzoll davon, den 1728ten Theil, also $\frac{108 \cdot 22}{5 \cdot 1728}$ ℔ oder $\frac{11}{40}$ ℔; und die eben gefundenen $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)$ Kubikzolle wiegen nun offenbar $\frac{4}{3}\pi \cdot (R^3-r^3) \cdot \frac{11}{40} \cdot$ ℔, d. h. $\frac{11}{30}\pi(R^3-r^3)$ ℔, während dasselbe Gewicht auch durch b ℔, also doppelt ausgedrückt ist, so daß man hat die Gleichung

$$1)\quad \tfrac{11}{30}\pi \cdot (R^3-r^3)=b.$$

Ferner ist der Radius der ganzen Kugel offenbar $=r+a$ Zolle; aber auch $=R$ Zolle, also noch

2) $R=r+a$.

Löst man nun die beiden Gleichungen nach R auf, r vorher eliminirend, so findet sich

$$R=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{10\cdot b}{11\cdot\pi\cdot a}-\frac{a^2}{12}}$$

oder
$$R=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{120\cdot b-11\cdot\pi\cdot a^3}{11\cdot 12\cdot\pi\cdot a}},$$

unter der Wurzel ihren positiven Werth gedacht, weil hier der andere Werth von R, wo die Wurzel ihren negativen Werth bekommt, offenbar zwar der Gleichung aber nicht der Aufgabe genügt, weil $R>a$ werden muß. Aber eben weil $R>a$ werden muß, so muß auch

$$+\sqrt{\frac{120b-11\cdot\pi\cdot a^3}{11\cdot 12\cdot\pi\cdot a}}>\frac{1}{2}a$$

oder
$$\frac{120b-11\cdot\pi\cdot a^3}{11\cdot 12\cdot\pi\cdot}>\frac{1}{4}a^3$$

d. h.
$$\frac{10\cdot b}{11\cdot\pi}>\frac{1}{3}a^3$$

sein, wenn die Aufgabe selbst möglich sein, d. h. eine Auflösung zulassen soll*).

Hätte man unter R, r, und a, die Zahlen der Fuße (und nicht der Zolle) verstanden, so wären die Gleichungen geworden

1) $\frac{4}{3}\pi(R^3-r^3)\cdot(7\frac{1}{5})\cdot\frac{3}{5}\cdot 110=b$

und 2) $R=r+a$;

---

*) Damit also diese Aufgabe möglich sei, reicht es nicht aus, daß die Wurzel in dem Ausdruck für R, reell werde; sondern, wenn auch diese Wurzel reell, also R selbst positiv ist, so ist die Aufgabe doch noch nicht möglich, so lange nicht zugleich die gedachte Wurzel $>\frac{1}{2}a$ wird.

also $$R = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{5 \cdot b}{36 \cdot 66 \cdot 4 \cdot \pi \cdot a} - \frac{a^2}{12}},$$

welches nun die Zahl der Fuße ist, welche der Halbmesser der Kugel hat, und wo aber auch unter a die Zahl der Fuße verstanden worden ist, welche die Dicke der Eisenlage hat.

§. 242.

Sind daher in einer Aufgabe die Größen allgemein gegeben (d. h. nicht wirklich gegeben, sondern nur als gegeben gedacht, so daß ihre Maaße durch allgemeine Zeichen (Buchstaben) bezeichnet und als gegebene Zahlen angesehen werden); gibt daher die Auflösung der Gleichungen für die Unbekannten, allgemeine Ausdrücke, die aber als Ziffernwerthe gedacht werden, so kann man auf die Möglichkeit dieser Aufgabe gar nichts schließen, weil sie für besondere Werthe der gegebenen allgemeinen Maaße möglich sein und eine Auflösung wirklich zulassen kann, für andere aber auch wiederum nicht. — Immer lassen sich aber dann für eine solche Aufgabe Bedingungen festsetzen, welche von den besondern Werthen der allgemein gegebenen Maaße erfüllt sein müssen, damit die Aufgabe möglich sein kann, und eine Auflösung zulassen muß. — Unter diesen Bedingungen stehen aber immer diejenigen oben an, welche erfüllt sein müssen, damit alle unbekannten und gesuchten Maaße der Größen absolute ganze oder gebrochene Zahlen werden. (M. s. d. vorhergeh. Beispiel 5.).

§. 243.

Ist in einer Aufgabe der Größenlehre die Abhängigkeit der Größen nicht bestimmt genug angegeben, so können auch die, diese Abhängigkeit ausdrückenden Gleichungen nicht angegeben, und daher die Aufgabe selbst nicht eher gelöst werden, als bis diese Unbestimmtheit (durch irgend eine hinzugefügte Bedingung) gehoben ist.

Indem aber eine solche zu allgemein gegebene Aufgabe nä-

here Bestimmungen erhalten muß, so zerfällt solche, nach den verschiedenen möglichen neuen Bedingungen, durch welche sie in eine völlig bestimmte und deshalb auflösbare Aufgabe übergeht, in verschiedene besondere Aufgaben, welche, wenn nicht eine davon als die gegebene herausgehoben wird, alle einzeln gelöst werden müssen, wenn man eine vollständige und für jeden Fall befriedigende Auflösung der zu allgemein gegebenen Aufgabe haben will.

Beispiel. Man soll an eine gegebene Kreislinie eine Tangente XY (Fig. 1.–4.) so ziehen, daß sie zwei andere sich schneidende und gegebene Tangenten DA und DB dergestalt schneidet, daß das zwischen den Durchschnittspunkten X und Y liegende Stück, einer gegebenen Linie a gleich ist. — Der Radius der Kreislinie sei r, und die gegebenen (einander gleichen) Tangenten DA und DB durch b bezeichnet. (Eigentlich a, b, r sollen die Maaße vorstellen der genannten Linien, für irgend eine beliebige Einheit).

In dieser Aufgabe ist unbestimmt gelassen, 1) auf welcher Seite die Tangente gezogen werden soll, und 2) ob der Berührungspunkt Z zwischen den beiden Durchschnittspunkten X und Y, oder ob einer der Durchschnittspunkte zwischen dem andern Durchschnittspunkt und dem Berührungspunkt zu liegen kommen solle.

Will man daher der Aufgabe bloß genügen, so setzt man irgend einen bestimmten dieser Fälle fest, und löset diese dadurch entstehende besondere Aufgabe auf. Giebt sie eine Auflösung, so hat man eine Tangente gefunden, welche die in der gegebenen Aufgabe verlangten Eigenschaften hat. — Giebt aber diese besondere Aufgabe gar keine Auflösung, entweder weil ihre Gleichungen für die Unbekannten nicht lauter absolute Zahlen geben, oder weil, wenn auch solche Zahlen gefunden worden sind, diese doch nicht den übrigen Bedingungen der Aufgabe entsprechen (also immer, weil diese besondere Aufgabe widersprechende Bedingungen enthält), so muß man einen zweiten Fall

festsetzen, diese zweite besondere Aufgabe auflösen, und findet dann eine, der gegebenen Aufgabe genügende Auflösung oder nicht. So kann man jeden besondern Fall, den die zu allgemein gegebene Aufgabe zuläßt, einzeln durchgehen, und nur wenn alle einzeln gelöst sind, ist die zu allgemein gegebene Aufgabe als vollständig gelöst anzusehen, so wie umgekehrt, nur wenn man gefunden hat, daß alle besondern Aufgaben, welche die zu allgemein gegebene Aufgabe zuläßt, widersprechende Bedingungen enthalten, d. h. keine Auflösung zulassen, man behaupten kann, daß die zu allgemein gegebene Aufgabe überhaupt keine Auflösung zulasse.

§. 244.

Soll daher eine solche zu allgemein gegebene Aufgabe der Größenlehre vollständig gelöst werden, so kann dies nicht anders, als auf folgende Art geschehen:

1) Man bilde durch eine genaue logische Eintheilung alle möglichen besondern Aufgaben, welche die zu allgemein gegebene in sich begreift *).

2) Man entwickle für jede dieser besondern Aufgaben die der Abhängigkeit der Größen entsprechenden Gleichungen besonders, löse die zu jeder einzelnen der Aufgaben gehörigen Gleichungen besonders auf, prüfe für jede der besondern Aufgaben, ob die aus ihren Gleichungen erhaltenen Werthe der Unbekannten, auch den übrigen Bedingungen dieser besondern Aufgabe entsprechen. Mit einem Worte man löse jede dieser besondern Aufgaben besonders; und alle Auflösungen zusammen, bilden dann die vollständige Auflösung der zu allgemein gegebenen Aufgabe.

---

*) Wir sagen hier absichtlich: durch eine logische Eintheilung, weil nur diese, gut durchgeführt, vor der Gefahr schützt, einen oder einige der besondern Fälle zu übergehen, und dadurch in vielen Fällen den Zweck der Auflösung gänzlich zu verfehlen.

Anmerkung. Mit einiger Uebung kann man in vielen Fällen, noch vor dem Auflösen, ja öfter noch vor dem Ansetzen der Gleichungen schon sehen, daß die Auflösung einer oder der andern, oder aller, dieser besondern Aufgaben (für gegebene bestimmte Größen) nicht möglich ist, und dadurch die Arbeit bedeutend abkürzen.

§. 245.

Sind in einer solchen zu allgemein gegebenen Aufgabe, die deshalb in mehrere besondere bestimmte Aufgaben zerfällt, die gegebenen Maaße allgemein gegeben (und durch Buchstaben bezeichnet), so werden, wenn man die Benennungen und Bezeichnungen der allgemeinen Aufgabe für jede der besondern Aufgaben beibehält, die für die einzelnen besondern Aufgaben hervorgehenden Gleichungen dasjenige mit einander gemein haben, was auch allen den einzelnen besondern Aufgaben gemeinschaftlich ist (nämlich die Bedingungen der allgemeinen Aufgabe), und daher durch einfache Substitutionen in einander übergehen können. Dann können aber nach (Kap. XII.) aus der Auflösung der Gleichungen einer dieser Aufgaben, sogleich die Auflösungen der Gleichungen der übrigen besondern Aufgaben unmittelbar durch dieselben Substitutionen erhalten werden. — Dies gewährt in vielen Fällen eine sehr bedeutende Erleichterung bei dem vollständigen Auflösen zu allgemein gegebener Aufgaben.

Beispiel. In dem Beispiel zu (243.) zerfällt die gegebene Aufgabe in 4 besondere Aufgaben. Soll sie also vollständig gelöst werden, so muß man jede dieser 4 besondern Aufgaben auflösen.

Ist nämlich C der Mittelpunkt der Kreislinie; sind ferner A und B die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten (so daß $CA = CB = r$) und D der Durchschnittspunkt derselben (so daß $DA = DB = b$). Ist ferner Z der Berührungspunkt der gesuchten Tangente, und X der Durchschnittspunkt derselben

mit DA, so wie Y ihr Durchschnittspunkt mit DB, so soll XY = a sein.

Nun bilden die Punkte D und A auf der (unendlich gedachten) Linie DA drei Regionen, und in jeder derselben kann der Punkt X liegen; eben so bilden die Punkte D und B auf der (als unendlich) gedachten DB ebenfalls 3 Regionen, in deren jeder der Punkt Y liegen kann*). Es sei in jeder der Linien DA und DB unter erster Region diejenige verstanden, welche von D aus vom Kreise abwärts ins Unendliche fortgeht, während die zweite Region zwischen D und A oder zwischen D und B sein soll. Welches dann in jeder der Linien DA und DB die dritte Region sein werde, ergiebt sich von selbst.

Die möglichen Fälle sind nun folgende:

I. Beide Punkte X und Y sind beide in der dritten Region (Fig. 2.)

II. Beide Punkte X und Y sind beide in der zweiten Region (Fig. 1.)

III. Der Punkt X in der ersten und Y in der dritten Region (Fig. 3.)

IV. Der Punkt Y in der ersten und X in der dritten Region (Fig. 4.),

weswegen die gegebene Aufgabe in diese 4 besondern Aufgaben zerfällt**).

Wird nun das Maaß von AX bezeichnet durch . . x
und das Maaß von BY " " . . . y
so ist das Maaß von DX bezeichnet:

---

*) Daß der Punkt X nicht in D oder A selbst, eben so wenig Y in D oder B liegen kann, fällt sogleich in die Augen. — Doch muß man, um keinen Fall entwischen zu lassen, hierauf Rücksicht nehmen.

**) Die Lage in den 3 Regionen des Punktes X, in Verbindung mit der des Y, gibt eigentlich 9 mögliche Fälle. Allein die bloße Ansicht lehrt sogleich, daß die übrigen 5 Lagen hier verworfen werden müssen.

wenn X in der dritten Region ist (Fig. 2. und 4.) . $b+x$
„ X „ „ zweiten „ „ (Fig. 1.) . . . $b-x$
„ X „ „ ersten „ „ (Fig. 3.) . . . $x-b$
und das Maaß von DY bezeichnet:
wenn Y in der dritten Region ist (Fig. 2. und 3.) . $b+y$
„ Y „ „ zweiten „ „ (Fig. 1.) . . . $b-y$
„ Y „ „ ersten „ „ (Fig. 4.) . . . $y-b$
und das Maaß von XY
in der Aufgabe I. durch . . . . . $x+y$
in der Aufgabe II. durch . . . . . $x+y$
in der Aufgabe III. durch . . . . . $x-y$
in der Aufgabe IV. durch . . . . . $y-x$
zu bezeichnen.

In jeder der besondern Aufgaben ist aber

$$XY^2 = DX^2 + DY^2 - 2DX.\,DY.\,Cos.\,(XDY).$$

Nun ist im Falle der Aufgaben I. und II.)

$$Cos.\,XDY = \frac{b^2-r^2}{b^2+r^2},$$

im Falle der Aufgaben III. und IV.) dagegen

$$Cos.\,XDY = -\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

folglich die Gleichungen, für die Aufgaben

$$\text{I. } x+y=a \text{ und } a^2=(b+x)^2+(b+y)^2-2(b+x)(b+y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

$$\text{II. } x+y=a \text{ und } a^2=(b-x)^2+(b-y)^2-2(b-x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

$$\text{III. } x-y=a \text{ und } a^2=(x-b)^2+(b+y)^2+2(x-b)(b+y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

$$\text{IV. } y-x=a \text{ und } a^2=(b+x)^2+(y-b)^2+2(b+x)(y-b)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2}.$$

Löst man nun die Gleichungen für die Aufgabe I.) auf, so erhält man:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b}r^2} \\ y &= \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b}r^2} \end{aligned}\right\}.$$

Setzt man aber

statt	$x,$	$y,$	$a,$	$b,$	r	in I.)
bezüglich	$-x,$	$-y,$	$-a,$	$b,$	r	für II.)
	$x,$	$-y,$	$a,$	$-b,$	r	für III.)
	$-x,$	$y,$	$a,$	$-b,$	r	für IV.),

so erhält man bezüglich die Gleichungen II., III. und IV.), folglich aus den Auflösungen mittelst derselben Substitutionen die Auflösungen

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \\ y &= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \end{aligned}\right\} \text{ für die Gleichungen II.}$$

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \\ y &= -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \end{aligned}\right\} \text{ für die Gleichungen III.}$$

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \\ y &= \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \end{aligned}\right\} \text{ für die Gleichungen IV.}$$

Nun man für jede der 4 besondern Aufgaben die Auflösungen der Gleichungen hat, darf man nur untersuchen, ob diese für jede Aufgabe gefundenen Werthe der Unbekannten auch den übrigen Bedingungen der Aufgabe genügen, also Auflösungen der Aufgaben selbst an die Hand geben.

Betrachten wir aber jede der Auflösungen der 4 verschiedenen Paare von Gleichungen, so sieht man sogleich, daß jede derselben zwei Auflösungen giebt, nämlich zwei Systeme von

Werthen für x und für y, welche den gegebenen Gleichungen genügen, und welche dadurch erhalten werden, daß man in den obigen Gleichungen für x und für y, beide obern (+) oder (—) Zeichen zugleich, oder beide untern zugleich stattfinden läßt.

Damit nun die Auflösungen 1.) den übrigen Bedingungen der Aufgabe I.) entsprechen, müssen die Werthe von x und von y absoluten Zahlen gleich werden. Es muß also nicht nur jede Wurzel reell werden, welches erfordert, daß

$$\alpha) \quad \tfrac{1}{4}a^2 \overset{=}{>} \frac{a+b}{b} r^2 \quad \text{sei,}$$

sondern es muß auch noch:

$$\beta) \quad \tfrac{1}{2}a > \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b} r^2}$$

sein, wo die Wurzel eine absolute Wurzel ist.

Dann ist aber auch

$$\tfrac{1}{4}a^2 > \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{a+b}{b} r^2.$$

Und weil dies letztere, in so ferne a, b, r, absolute Zahlen sind, allemal der Fall sein muß, so bleibt bloß noch die Bedingung (α) übrig, welche von den Werthen von a, b und r erfüllt sein muß, wenn die Aufgabe I.) eine Auflösung haben soll; und ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Aufgabe I.) auch jedesmal zwei Auflösungen.

Ist aber

$$\tfrac{1}{4}a^2 \overset{=}{>} \frac{a+b}{b} r^2,$$

so ist auch $\left(\tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b}\right)^2 \overset{=}{>} \left(\frac{r}{b} \cdot \sqrt{b^2 + r^2}\right)^2.$

Umgekehrt, ist entweder

$$\tfrac{1}{2}a - \frac{r^2}{b} \overset{=}{>} \frac{r}{b}\sqrt{b^2 + r^2},$$

oder $\quad -\tfrac{1}{2}a + \frac{r^2}{b} \overset{=}{>} \frac{r}{b}\sqrt{b^2 + r^2},$

so ist auch $\left(\frac{1}{2}a-\frac{r^2}{b}\right)^2 \overset{=}{>} \frac{r^2}{b^2}(b^2+r^2)$,

und dann auch $\frac{1}{4}a^2 \overset{=}{>} \frac{a+b}{b}r^2$.

Die Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe I.) reduzirt sich also auf

$$\gamma)\quad \frac{1}{2}a-\frac{r^2}{b} \overset{=}{>} \frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2}$$

oder

$$\delta)\quad -\frac{1}{2}a+\frac{r^2}{b} \overset{=}{>} \frac{r}{b}\sqrt{b^2+r^2},$$

wo überall die Wurzel ihren absoluten Werth repräsentirt. — Die Bedingung δ) würde aber geben

$$\frac{r}{b}\cdot(r-\sqrt{b^2+r^2}) \overset{=}{>} \frac{1}{2}a,$$

was nie möglich ist, weil $r-\sqrt{b^2+r^2}$ immer einer negativen Zahl gleich ist; folglich kann die Bedingung δ) nie erfüllt werden, und es bleibt also ganz allein die Bedingung γ)

oder $\frac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}\cdot(r+\sqrt{b^2+r^2})$,

welche jedesmal erfüllt sein muß, wenn die Aufgabe I.) Auflösungen zulassen soll.

Man kann auch noch bemerken, daß diese Bedingung γ) nöthig ist, damit die Wurzeln reell werden. — Sind diese Wurzeln reell, so werden die Werthe von x und von y, in diesem Fall, immer absolute Zahlen.

Dabei hat die Aufgabe I.), wenn sie eine Auflösung hat, auch jedesmal deren zwei.

Untersuchen wir nun eben so die Gleichungen 2.). Auch sie müssen für x und y nicht bloß reelle, sondern auch absolute Werthe geben. Es muß daher, damit die Aufgabe II.) möglich sein soll

$$\varepsilon)\quad \frac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2 \overset{=}{>} 0$$

und $\zeta)\quad \frac{1}{2}a > \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2}$ sein.

Die Bedingung ζ) gibt

$$\frac{1}{4}a^2 > \frac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2,$$

oder $$0 > \frac{a-b}{b}r^2,$$

oder $$\zeta)\qquad b > a.$$

Die Bedingung ε) dagegen gibt

$$\frac{1}{4}a^2 + \frac{r^2}{b}a + \frac{r^4}{b^2} \overset{=}{>} \frac{r^2}{b^2}(b^2 + r^2),$$

oder $$\frac{1}{2}a + \frac{r^2}{b} \overset{=}{>} \frac{r}{b}\sqrt{b^2 + r^2}$$

oder $$\vartheta)\quad \frac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(-r + \sqrt{b^2 + r^2}).$$

Umgekehrt: sind die Bedingungen ζ) und ϑ) erfüllt, so sind es auch die Bedingungen ζ) und ε), und die Aufgabe II.) ist dann möglich, und läßt jedesmal sogleich zwei Auflösungen zu.

Dabei kann man bemerken, daß wenn ϑ) erfüllt ist, die Wurzeln reell werden, und daß ζ) die Bedingung der absoluten Werthe ist.

In Bezug auf die Aufgabe III.) muß, damit sie möglich ist, wiederum die vorige Bedingung ε) oder ϑ), dabei aber noch die neue:

$$\frac{1}{2}a < \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r}$$

d. h. $$a < b$$

statthaben. Weil aber, wenn $a > b$, auch die Bedingung ε) nothwendig erfüllt ist, so hat man, damit die Aufgabe III.) möglich ist, die einzige Bedingung, daß

$$\lambda)\qquad a > b.$$

Zugleich sieht man, daß wenn man in den Auflösungen 3)

die untern (+ oder —) Zeichen gebrauchte, der Werth von y nothwendig negativ werden würde, weshalb diese beiden Auflösungen der Gleichungen III.), auch wenn die Bedingung, daß

$$a > b,$$

erfüllt ist, doch nur eine Auflösung der Aufgabe III.) geben.

Die Aufgabe IV.) ist offenbar in demselben Falle möglich in welchem die III.) möglich ist. Auch hat sie, selbst wenn sie möglich ist, immer nur eine Auflösung.

Stellt man die Bedingungen der Möglichkeit dieser 4 Aufgaben zusammen, so findet man:

Die Aufgabe

I. ist möglich, wenn $\frac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2})$; und hat dann immer zwei Auflösungen;

II. ist möglich, wenn

$$\tfrac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2})$$

und zugleich

$$a < b,$$

und sie hat dann immer zwei Auflösungen.

Die Aufgaben

III. und IV. dagegen sind allemal möglich, wenn $a > b$, und jede derselben hat dann jedesmal nur eine einzige Auflösung.

Vergleicht man diese Bedingungen, so erhellet noch:

A) Man kann den Buchstaben a, b und r solche (absolute) Werthe geben, daß die Aufgabe II.) ganz allein möglich, die I.), III.) und IV.) dagegen unmöglich werden.

B) Man kann den Buchstaben a, b und r solche Werthe geben, daß II.) und I.) zugleich möglich werden; weil, wenn

$$\tfrac{1}{2}a \overset{=}{>} \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2}) \quad \text{ist}$$

auch jedesmal $\frac{1}{2}a \gtreqless \frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2})$
sein muß.

C) Die Aufgaben III.) und IV.) sind immer zugleich möglich und keine derselben mit der Aufgabe II.) zugleich möglich, daher sind

D) nie alle 4 Aufgaben zu gleicher Zeit möglich, obgleich

E) den Buchstaben a, b und r auch solche Werthe gegeben werden können, daß I.) und III.) und IV.) zugleich möglich werden.

Die Auflösungen I.) geben nie

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 0.$$

Dagegen werden in 2.), 3.) und 4.) entweder x und y, oder doch x allein, oder y allein der Null gleich, wenn $b = a$, und zeigen daher allemal eine Unmöglichkeit dieser 3 Aufgaben II.), III.) und IV.) an, in diesem Fall, wo $b = a$, wie das auch schon aus den Bedingungen hervorgeht. — Dagegen reduzirt sich die Bedingung der Möglichkeit der Aufgabe I.) für diesen Fall auf

$$\frac{1}{8}a^2 \gtreqless r^2$$

oder $$a^2 \gtreqless 8r^2.$$

§. 246.

Gibt eine Gleichung A) die Auflösung

$$x = -\alpha,$$

wo α eine absolute, $-\alpha$ daher eine negative Zahl ist, so entspricht der Werth

$$x = \alpha$$

allemal einer andern Gleichung B), welche aus A) erhalten wird, indem man $-x$ statt x schreibt.

Denn da B) aus A) hervorgeht durch diese Substitution,

so geht auch die Auflösung von B) aus der Auflösung von A), nämlich aus

$$x = -\alpha,$$

hervor durch dieselbe Substitution (Kap. XII.) und B) gibt daher als Auflösung

$$-x = -\alpha \quad \text{oder} \quad x = \alpha.$$

Dieser Werth $x = \alpha$ leistet also der zweiten Gleichung B) ein Genüge, und entspricht daher jeder Aufgabe, welche zu dieser Gleichung B) führt, wenn nur derselbe Werth α auch den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben entspricht.

§. 247.

Gibt eine Gleichung A) für den Unbekannten x mehrere Auflösungen, darunter eine oder mehrere negative, etwa

$$x = -\alpha, \quad x = -\beta, \quad \text{u. s. w.,} \quad x = \gamma, \quad x = \delta,$$

so entsprechen die Auflösungen

$$x = \alpha, \quad x = \beta, \quad \text{u. s. w.,} \quad x = -\gamma, \quad x = -\delta$$

der Gleichung B), welche aus A) dadurch erhalten wird, daß man in A) überall $-x$ statt x schreibt. — Die absoluten Werthe α und β entsprechen daher jeder Aufgabe, welche zu dieser Gleichung B) führt, wenn sie nur sonst noch den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben entsprechen.

§. 248.

Allgemein: geben mehrere Gleichungen A, B, C, D, ꝛc., welche einer Aufgabe entsprechen, für ihre Unbekannten x, y, z, v, u. s. w. ein oder mehrere Systeme von Werthen (d. h. zusammengehörige Werthe), darunter z. B. das System

$$x = \alpha, \quad y = -\beta, \quad z = -\gamma, \quad v = \delta, \quad \text{u. s. w.,}$$

so genügt das System

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma, \quad v = \delta, \quad \text{u. s. w.}$$

denjenigen Gleichungen, A^1, B^1, C^1, D^1 u. s. w., welche aus

den erstern A, B, C, D, ... durch Substitution von $-y$ statt y, $-z$ statt z u. s. w., x und v statt x und v, abgeleitet werden, folglich auch jeder Aufgabe, welche zu diesen neuen Gleichungen A^1, B^1, C^1, D^1, u. s. w. führt, wenn nur die absoluten Auflösungen α, β, γ, δ, u. s. w. auch noch den übrigen Bedingungen einer jeden solchen Aufgabe entsprechen.

Nimmt man also statt der negativen Werthe $-\beta$, $-\gamma$, u. s. w. die absoluten Werthe β und γ, so entsprechen diese allen denjenigen Aufgaben, welche mit der gegebenen dergestalt in Verbindung stehen, daß ihre Gleichungen A^1, B^1, C^1, D^1, u. s. w. aus denen A, B, C, D, u. s. w. der gegebenen Aufgabe, durch bloße Substitution von $-y$ statt y und $-z$ statt z u. s. w. hervorgehen.

Beispiel. Gehen wir zu der in den Beispielen zu §§. 243. und 245. behandelten Aufgabe zurück. — Die Aufgabe II.) gab die Gleichungen

$$(A)\,x+y=a,\ \text{und}\ (B)\,a^2=(b-x)^2+(b-y)^2-2(b-x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2};$$

und diese geben in 2.) die beiden Systeme von Werthen

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y &= \tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{aligned}\right\}$$

$$\text{und}\ \left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \\ y &= \tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \end{aligned}\right\}.$$

Ist nun $\quad \tfrac{1}{2}a<\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$

oder, was dasselbe ist,

$$a>b,$$

so wird im ersten System

$$x=-\alpha \quad \text{und} \quad y=\beta,$$

und im zweiten

$$x = \beta \quad \text{und} \quad y = -\alpha,$$

wo α und β bezüglich die absoluten Zahlen

$$-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{a-b}{b}r^2}$$

vorstellen. — Die Auflösung der Aufgabe II.) ist daher, wegen der negativen Werthe, welche x im ersten System und y im zweiten, für diesen Fall, daß $a > b$, bekommen, nicht möglich, sondern enthält einander widersprechende Bedingungen.

Die Auflösungen

$$x = \alpha \quad \text{und} \quad y = \beta$$

des ersten Systems entsprechen aber nun den neuen Bedingungsgleichungen

$$A^1) \quad -x + y = a$$

und

$$B^1) \quad a^2 = (b+x)^2 + (b-y)^2 - 2(b+x)(b-y)\frac{b^2-r^2}{b^2+r^2},$$

die aus A) und B) durch Substitution von $-x$ statt x hervorgehen. Diese Werthe

$$x = \alpha \quad \text{und} \quad y = \beta$$

entsprechen daher jeder Aufgabe, welche zu diesen neuen Gleichungen führt, wenn sie nur sonst den übrigen Bedingungen einer jeden dieser Aufgaben genügen. — Und in so ferne die Aufgabe IV.) gerade zu diesen Gleichungen führt, entsprechen diese Werthe

$$x = \alpha, \qquad y = \beta$$

auch der Aufgabe IV.).

Anmerkung. Diese einfache, klare und strenge Theorie wird wohl, ohne noch viel darüber sagen zu müssen, hinlänglich sein, um die bisher in deutschen Elementar-Werken so oft wiederholte Behauptung, „daß negative Auflösungen der Gleichungen allemal in entgegengesetzter Beziehung genommen werden und

dann Auflösungen eines andern besondern Falles einer allgemeinen Aufgabe geben müssen", als unrichtig und deshalb verwerflich, an das Licht treten zu lassen. Diese Behauptung kann in mehreren, ja in vielen Beispielen bestätigt sein; wir selbst werden in der (später folgenden) Raumgrößenlehre einen sehr weit umfassenden Fall nachweisen, in welchem sie nothwendig stattfinden muß; allein im allgemeinen findet sie nicht statt, und ist daher solche geradezu unrichtig und falsch.

Wir wollen dies noch durch ein Beispiel nachweisen. Es sei nämlich wiederum die in den Beispielen zu §§. 243. und 245. behandelte Aufgabe gegeben, jedoch außer den übrigen Bedingungen noch die neue hinzugefügt, daß die gesuchte Tangente zwischen ihren Durchschnittspunkten ganz in der Fläche des Winkels liegen soll, welchen die beiden Tangenten AD und BD mit einander bilden.

Offenbar ist auch diese Aufgabe zu allgemein; und es muß daher solche wieder in alle möglichen besondern Aufgaben zerlegt werden. Geschieht dies, so findet man sogleich, daß diese Aufgabe nur zwei besondere Aufgaben zuläßt und zwar die I.) und die II.), während die III.) und die IV.) gar nicht berücksichtigt werden dürfen. Es seien nun diese beiden Aufgaben I.) und II.) wie oben gelehrt wurde, aufgelöst. Es sei ferner in einem besondern Fall

$$a > b$$

und zugleich

$$\tfrac{1}{2}a \geqq \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2}),$$

so gibt die Aufgabe II.) als Auflösung ihrer Gleichungen, für x und y die beiden Systeme von Werthen

$$x = -\alpha, \qquad y = \beta$$

und

$$x = \beta, \qquad y = -\alpha,$$

wo α und β bezüglich die absoluten Zahlen

$$-\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2} \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{a-b}{b}r^2}$$

vorstellen.

Die Aufgabe II.) wo X und Y in den zweiten Regionen liegen, ist daher für diesen Fall nicht möglich, und enthält widersprechende Bedingungen. — Wollte man nun der gewöhnlichen Ansicht folgen, so müßte der Werth α für AX, in die entgegengesetzte Richtung getragen, so daß X statt in die zweite Region zu kommen, jetzt in die dritte zu liegen käme, während Y, wegen BY oder y positiv, in der ersten oder in der zweiten Region bliebe, eine Auflösung der allgemeinen Aufgabe geben; eben so müßte, nach der gewöhnlichen Meinung, weil das zweite System

$$x=\beta, \qquad y=-\alpha,$$

y negativ gab, dieser Werth α für BY oder y, in die entgegengesetzte Richtung getragen, (so daß Y in die dritte Region zu liegen käme, während X, wegen AX oder x positiv, noch in der ersten oder zweiten Region bliebe), den andern besondern Fall der allgemeinen Aufgabe, der noch übrig ist, lösen. — Beides ist aber, wie man sich augenblicklich durch die bloße Ansicht überzeugen kann, nicht der Fall. — Nichtsdestoweniger hat die Aufgabe, allgemein wie sie gegeben ist, unter den hier gemachten Voraussetzungen, wirklich eine Auflösung, in so ferne die Aufgabe I.) gerade für die hier angenommenen Werthe von a, b und r, möglich ist und zwei Auflösungen zuläßt. — Merkwürdig ist dabei, daß gerade diese Auflösungen der Aufgabe, das AX und das BY in einer, der in II.) angenommenen, entgegengesetzten Richtung enthalten sind, in so ferne in II.) die Punkte X und Y in den zweiten Regionen angenommen sind, während sie in I.) in den dritten Regionen liegen. Aber die Werthe von AX und BY sind von den vorigen Werthen α und β, oder β und α ganz verschieden, wie augenblicklich aus der bloßen Ansicht der aufgelösten Gleichungen für I.) und für II.) hervorgeht.

Der Werth α aus der Auflösung

$$x = -\alpha,$$

in die entgegengesetzte Richtung getragen, gibt also doch nicht den Punkt X, der wirklich in der entgegengesetzten Richtung liegt, und die allgemeine Aufgabe wirklich löst.

Wir können diese Gelegenheit nicht vorbeigehen lassen, ohne noch eine andere Behauptung zu berichtigen, die ebenfalls sehr häufig gefunden, und ebenfalls nicht in dem Umfange richtig ist, für welchen sie ausgesprochen wird.

Man sagt nämlich gewöhnlich, daß wenn eine Aufgabe imaginäre Werthe gebe, so wäre sie unbedingt unmöglich. — Nehmen wir dieselbe Aufgabe, die wir so eben betrachteten, wieder hervor:

es sei $$a<b,$$

und zugleich $$\tfrac{1}{2}a \gtreqless \frac{r}{b}(-r+\sqrt{b^2+r^2}),$$

während $$\tfrac{1}{2}a < \frac{r}{b}(r+\sqrt{b^2+r^2})$$ sein soll,

so gibt die Aufgabe I.) für x und für y imaginäre Werthe. Wollte man nun hieraus schließen, daß es überhaupt keine Tangente gebe, welche mit allen ihren zwischen X und Y liegenden Punkten in der Fläche des Winkels ADB liegt, und sonst den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so würde man sich sehr irren; denn während I.) zu Auflösungen zwei zusammengehörige imaginäre Werthe gibt, ist die Auflösung von II.) möglich, so daß man dennoch für diesen Fall zwei Tangenten erhält, welche allen Bedingungen der gegebenen Aufgabe entsprechen.

Hätte man daher für solche besondere Werthe von a, b, r, die Aufgabe auf die gewöhnliche Art gelöst, nicht vorher alle besondere Fälle aufgesucht (durch logische Eintheilung), welche diese Aufgabe enthalten kann, die Tangente bei der besondern Auflösung so liegend gedacht, wie dies in I.) der Fall ist, so

hätte man für x und für y zwei Systeme imaginärer Werthe erhalten, daraus geschlossen, daß die Aufgabe überhaupt keine Auflösung zulasse (nach den in älteren Lehrbüchern so häufig gefundenen Beispielen ähnlicher Art), und sonach wären die beiden Auflösungen, welche die Aufgabe in diesem Falle wirklich hat, geradezu entwischt.

Schluß-Anmerkung.

Läßt man die Gleichung

$$aE - bE = (a-b)E \quad (\S.\ 228.\ \text{N}.\ 2.)$$

als Definition der negativen benannten Zahl gelten, wenn a kleiner als b und $a-b=-c$ ist, so wird $(-c)E$ die Größe ausdrücken, welche zu bE hinzugefügt, die erstere aE wieder giebt.

Daraus folgerte auch, daß $(b-b)E$ d. h. 0E die Größe bedeutete, welche zu bE hinzugefügt, dieselbe Größe bE unverändert wieder giebt. Weil aber Nichts diese Eigenschaft hat, so würde die 0 (Null), als benannte Zahl gedacht, Nichts vorstellen.

Da ferner, wenn $a-b=-c$, auch $a+c=b$ und $b-c=a$ ist, also auch $aE+cE=bE$ und $bE-cE=aE$, so würde cE die Größe ausdrücken, welche von bE hinweggenommen, aE giebt.

Während also cE die Größe ausdrückt, welche von bE hinweggenommen, aE gibt; würde $(-c)E$ die Größe ausdrücken, die zu bE hinzugefügt, aE gibt. Es würden also cE und $(-c)E$ Größen ausdrücken, welche dergestalt in entgegengesetzten Beziehungen ständen, daß das Hinwegnehmen der einen, zugleich ein Hinzufügen der andern wäre.

In der Natur ist allenthalben ein Gegensatz offen dargelegt, z. B. Steigen und Fallen, Vorwärts und Rückwärts, Schulden und Vermögen, u. dergl. Und man sieht leicht, wie c im Vermögen habende Thaler, von b Thalern Vermögen hinweggenom-

men, so viel übrig lassen, wie c schuldige Thaler, welche bei einer Person zu b im Vermögen habenden Thalern hinzugefügt werden. Also würde (—c) Rthlr. Vermögen gleichbedeutend sein mit c Rthlr. Schulden; eben so (—c) Fuß Steigen, gleichbedeutend mit c Fuß Fallen, u. s. w. f.

Es entstände aber dann die Frage, ob noch immer

$$aE + bE = (a+b)E \quad \text{und} \quad aE - bE = (a-b)E$$

sein werde, auch wenn a und b beliebige positive oder negative Zahlen sind. Untersuchte man dies in den 4 möglichen Fällen, nämlich wenn a und b zugleich positiv, oder zugleich negativ sind, oder a positiv und b negativ, oder a negativ und b positiv ist, so erhielte man für diese Frage eine bejahende Antwort. Namentlich erhielte man dann auch

$$aE + (-a)E = 0E$$

d. h. die negative benannte Zahl (—a)E zu der benannten Zahl aE hinzugefügt, würde Nichts zum Resultat geben. Gleiche, aber in entgegengesetzter Beziehung genommene Größen zusammengefügt, heben sich also gegenseitig auf.

Wollte man daher den Begriff der negativen benannten Zahl so, wie oben geschehen, zulassen, so könnte man dies thun, wenn man nur nicht mehr für sie gelten ließe, als kurz vorher geltend gemacht worden ist, und namentlich nicht eher Größen als entgegengesetzte ansehen wollte, bis wirklich der Gegensatz in ihnen betrachtet wird. Ferner darf man nicht übersehen, daß nur dann (—c)E das entgegengesetzte von cE ausdrückt, wenn die Einheit E erstlich als eine und dieselbe, und zweitens bereits mit einer der beiden entgegengesetzten Beziehungen versehen, gedacht wird *).

---

*) So drückte (—a) Rthlr. gar nichts aus; aber (—a) Rthlr. Vermögen stellte a Rthlr. Schulden, und (—a) Rthlr. Schulden stellte wieder a Rthlr. Vermögen vor; und der einzige Vortheil, der aus der Zulassung dieser Bedeutung hervorginge, bestände zur Zeit bloß darin, daß man bei dem Hinzufügen und Wegnehmen der Größen, entgegengesetzte Größen als auf einerlei Benennung gebrachte benannte Zahlen ansehen und behandeln könnte.

Es ist aber viel naturgemäßer, die Formel $(a-b)E = aE-bE$ nicht anders gelten zu lassen, als nur, wenn a größer ist als b; solche eingebildete Formen $(-a)E$ (d. h. negative benannte Zahlen) nicht aufzunehmen; und den Gegensatz der Dinge (nicht auf die Einheit, also auch nicht auf die Größe sondern) auf den Gegensatz der Operationen des Addirens und Subtrahirens selbst zu werfen. — Nach dieser einfachern Ansicht wird die Einheit in keiner von zwei entgegengesetzten Beziehungen gedacht, sondern absolut. Nach derselben Ansicht existiren also zwar entgegengesetzte Dinge, aber nicht entgegengesetzte Größen, sondern jede Größe ist absolut; und von entgegengesetzten Größen ist also dann nie mehr die Rede.

So sind 8 Rthlr. allemal ein und dieselbe Summe Geldes, ob ich sie im Vermögen habe, oder schuldig bin; aber im erstern Fall werde ich sie zu meinem Vermögen addiren, im andern Fall davon subtrahiren, wenn ich in beiden Fällen mein Vermögen genau kennen will.

Wir wollen zur nähern Erläuterung noch folgende Aufgaben betrachten:

Wie viel Rthlr. Vermögen muß der haben, welcher, wenn er von seinem Vermögen zuerst a Rthlr. hinwegnimmt, dann noch b Rthlr. dazu bekommt, gerade c Rthlr. besitzt.

Bezeichnet z die Zahl der Rthlr., so hat man

$$z \text{ Rthlr.} - a \text{ Rthlr.} + b \text{ Rthlr.} = c \text{ Rthlr.}$$

d. h. 1) $z-a+b = c$

und 2) $z = c+a-b = a-b+c = a+c-b$;

und $a-b+c$ ist der Ausdruck, welcher statt z gesetzt, die Gleichung I.) identisch macht.

Man muß jedoch nicht übersehen, daß, wenn man einen Ausdruck z gefunden hat, welcher der Gleichung I.) genügt, dann jedesmal noch untersucht werden muß, ob er auch wirklich allen, auch den in der Gleichung nicht beachteten Bedingungen

der Aufgabe selbst genügt. Es kann z. B. für gewisse Werthe von a, b, c, der gesuchte Ausdruck z eine wirkliche Zahl werden, die aber kleiner ist als a; so daß von einem Vermögen, welches kleiner ist als a Rthlr., diese größere Zahl von Thalern weggenommen werden soll, was doch nicht möglich ist; so daß also, obgleich für z eine wirkliche Zahl gefunden worden, die Aufgabe selbst, ganz streng genommen, keine Auflösung zuläßt.

Bei dem Arbeiten mit bloßen Rechnungsformen nämlich, kann man für die unmögliche Form $z-a+b$, die mögliche $z+b-a$ setzen. Aber eben dadurch haben wir auch in der Rechnung nicht allein unsere hier wirklich gegebene Aufgabe, sondern auch die andere, welche zu

$$z+b-a=c$$

führt, und welche, wenn beide möglich sind, dieselbe Zahl z liefert, welche aber viel häufiger möglich ist als die gegebene, zugleich mit im Auge gehabt und behandelt. Daher ist es nöthig, das für z gefundene Resultat erst zu prüfen, ob es wirklich der gegebenen Aufgabe in allen Dingen entspricht, oder ob es nicht vielleicht die Lösung einer andern, mit der gegebenen innigst verwandten Aufgabe enthält.

Es können ferner a, b und c solche Zahlen bedeuten, daß $a+c$ kleiner noch ist, als b, so daß sich für z eine negative Zahl ergibt. Keine der erwähnten Aufgaben ist nun möglich. Genügen wir aber der Gleichung

$$z \text{ Rthlr. V.} - a \text{ Rthlr. V.} + b \text{ Rthlr. V.} = c \text{ Rthlr. V.},$$

wo Rthlr. V. den im Vermögen habenden Rthlr. ausdrückt, und finden wir $z=-[b-(a+c)]=-d$, (wenn die Zahl $b-(a+c)$ durch d vorgestellt wird), so wird man unter $(-d)$ Rthlr. V., sich d Rthlr. Schulden denken dürfen, ohne gerade Widersprüche zu erwarten zu haben, wenn man nur die Aufgabe selbst jedesmal in dieser abgeänderten fingirten Beziehung nimmt.

Einfacher, naturgemäßer und gründlicher bleibt es aber

immer, in solchem Falle statt z den Ausdruck $-x$ zu setzen, (in die Gleichung $z-a+b=c$), so daß die Gleichung

$$-x-a+b=c \quad \text{oder} \quad b-a-x=c$$

daraus wird, weil man nun offenbar nicht

$$z=-[b-(a+c)], \quad \text{sondern} \quad -x=-[b-(a+c)]$$

d. h. $x=b-(a+c)$, also eine wirkliche Zahl für x bekommt. Dann kann man die Aufgabe suchen, welche zur Gleichung $b-a-x=c$ führt, und wo x die gesuchte Zahl bedeutet; und der wirkliche Werth von x wird einer solchen Fiktion nicht bedürfen. — Die Aufgabe aber, welche zur Gleichung $b-a-x=c$ führt, kann in Worte, wie folgt, gekleidet werden.

Jemand hat b Rthlr. baares Geld, bezahlt davon a Rthlr. Schulden, und fragt sich, wieviel Schulden (nämlich x Rthlr.) er noch bezahlen dürfe, wenn ihm zuletzt c Rthlr. baar übrig bleiben sollen. — Oder auch: wieviel Schulden hatte derjenige, welcher noch a Rthlr. Schulden dazu machte, und dann mit einem Vermögen von b Rthlr. die Schulden tilgte und noch c Rthlr. übrig behielt. In beiden Fällen hat man offenbar

$$b-a-x=c \quad \text{und} \quad x=b-(a+c).$$

[illegible]

Es können ferner a, b und c solche Zahlen bedeuten, daß a+c kleiner noch ist, als b, so daß sich für x eine negative Zahl ergibt. Keine der erwähnten Aufgaben ist nun möglich. Genügen wir aber der Gleichung

x Rthlr. V. — a Rthlr. V. + b Rthlr. V. = c Rthlr. V.,

wo Rthlr. V. den im Vermögen habenden Rthlr. ausdrückt, und finden wir $x = -[b-(a+c)] = -d$, (wenn die Zahl $b-(a+c)$ durch d vorgestellt wird), so wird man unter (—d) Rthlr. V. sich d Rthlr. Schulden denken dürfen, ohne gerade Widersprüche zu erwarten zu haben, wenn man nur die Aufgabe selbst jedesmal in dieser abgeänderten fingirten Beziehung glaubt.

Einfacher, naturgemäßer und gründlicher [illegible]

Anhang.

Anhang.

Anwendung der im Vorstehenden entwickelten abstrakteren Lehren des Kalkuls auf die Begründung einer Koordinaten-Theorie.

Vorerinnerung.

In diesem ersteren Theile der Zahlenlehre (des Kalkuls, der Analysis) sind im Wesentlichen die folgenden Ansichten festgehalten worden:

1) Die 7 Zeichen $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, a^b, $\sqrt[b]{a}$ und $\overset{b}{log}\, a$ sind die Repräsentanten der sieben, bei den Zahlen zunächst vorkommenden Verstandes-Thätigkeiten (Operationen); die Buchstaben a und b selbst sind beliebige Träger der letzteren.

2) Das Verhalten dieser sieben Verstandes-Thätigkeiten zu einander wird niedergelegt in Schemen von der Form

$(a+b)-c=(a-c)+b$; rc. rc.; $\frac{a}{b} \cdot b=a$, $(a \pm b)c=ac \pm bc$, rc. rc.; $a^{m+n}=a^m \cdot a^n$; $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$; $\overset{b}{log}\, a \cdot \overset{c}{log}\, b=\overset{c}{log}\, a$; rc. rc., welche „Gleichungen" genannt werden. — Jede Seite des Gleichheits-Zeichens ist eine Form, welche entweder einfach, oder zusammengesetzt ist und in letzterem Falle eine der vorgedachten sieben Verstandes-Thätigkeiten, oder eine ganze Reihe derselben repräsentirt.

3) Die Anwendung dieser Schemen (Grund-Gleichungen) zur Umformung gegebener Formen in andere ist das „Rechnen". — Es giebt kein anderes Rechnen.

4) Sind die Träger a, b, c, ꝛc. der Operations-Zeichen in besonderen Fällen Zahlen (ganze, unbenannte, die einzigen, die es giebt), so gehen aus den allgemeinen Formen $a-b$, $\frac{a}{b}$, $\sqrt[b]{a}$ speciellere hervor, nämlich $a-a$ (und dies führt zu dem Begriff der „Null"), ferner $0+a$, $0-a$ (für welche wir der Kürze wegen bloß $+a$, $-a$ schreiben, und welche wir dann entweder „additive" und „subtraktive" Ausdrücke nennen, oder „positive und negative", je nachdem a noch ganz allgemein oder bereits specieller aufgefaßt ist), — ferner $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ ꝛc. ꝛc. (welche speciellen Fälle der allgemeinen Form $\frac{a}{b}$ wir die „gebrochenen" Zahlen nennen), endlich $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-\frac{2}{3}}$ ꝛc. ꝛc. (welche speciellen Fälle der allgemeinen Form $\sqrt[b]{a}$, „imaginäre Wurzeln" genannt werden. — Mit allen diesen letztgenannten speciellen Zahlformen wird nun (nach N. 3.) „gerechnet" und es giebt kein anderes „Rechnen". — Das Rechnen selbst ist also nur nach den Formen verschieden, welche man als Zwecke des Umformens (nach N. 3.) hinstellt*). — Sind die Träger der Formen bereits bestimmte Zahlen, so kann noch die Bedeutung der bestimmten Zahlzeichen (Ziffern) nebenher mit in Betracht gezogen werden.

---

*) So ist z. B. der Zweck des „gemeinen" (oder Ziffern-) Rechnens kein anderer als jeden durch eine Reihe der genannten sieben Verstandes-Thätigkeiten gebildeten Ausdruck (Form) in die Form

$$\cdots+\delta z^3+\gamma z^2+\beta z+\alpha+\frac{\mu}{\nu}$$

umzuformen, wo z die Basis des Zahlensystems (also gewöhnlich zehn) vorstellt, während $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ Ziffern sind und $\frac{\mu}{\nu}$ irgend eine gebrochene Zahl (angezeigte Division zweier ganzen Zahlen) ist. — Einer der Hauptzwecke der „Differenzial-Rechnung" ist dagegen die Umformung auf die Form

$$f_0+f_1\cdot h+f_2\cdot h^2+f_3\cdot h^3+\cdots \text{ in inf.},$$

wo h beliebig und in vielen Anwendungen unendlich-klein gedacht wird.

5) Ein Rechnen mit „Größen" ist daher unmöglich und man kann mit der „Null", mit den „positiven und negativen" Zahlen, mit den „gebrochenen" Zahlen, so wie mit den „imaginären Wurzeln" nur deshalb rechnen, weil sie nicht „Größen", sondern „Formen", d. h. angezeigte Verstandes-Thätigkeiten (angezeigte Operationen) sind (nach N. 3.).

6) Die Zahlenlehre (Analysis) wird aber zur „Vergleichung der Größen" benutzt und zwar so:

a) jede Größe wird zunächst als benannte ganze Zahl, nachher auch vermöge der Eigenthümlichkeit der Form $\frac{a}{b}$, als benannte gebrochene Zahl ausgedrückt; sie könnte auch als benannte negative (ganze oder gebrochene) Zahl ausgedrückt werden, wenn irgend ein praktischer Nutzen daraus hervorgehen würde, was jedoch nicht der Fall ist.

b) In jeder Aufgabe der „Größenlehre" wird eine unbenannte ganze oder gebrochene Zahl gesucht, welche auf eine vorher bestimmt angenommene Benennung bezogen, die Größe als benannte Zahl darstellt, welche als die gesuchte bezeichnet worden ist.

Indem man nun alle Größen, welche in einer Aufgabe vorkommen, als benannte Zahlen ausdrückt (die ganz oder gebrochen sind), drückt man zuletzt eine dieser Größen (vermöge der Bedingungen der Aufgabe) noch einmal, also doppelt als benannte Zahl aus, so daß man eine und dieselbe unbenannte ganze oder gebrochene Zahl durch zwei verschiedene Formen ausgedrückt hat; diese beiden Formen sind dann „einander gleich" und man bekommt also eines der Schemen, von denen oben in N. 2. einige der einfachsten vorgeführt worden sind, nur daß ein Buchstabe z. B. x vorkommt, welcher die gesuchte unbenannte ganze oder gebrochene Zahl vorstellt, welcher also eine völlig bestimmte aber noch unbekannte Bedeutung hat.

Ist nun diese (Ansatz-) Gleichung z. B.

$$\frac{a}{b}-x=c-\frac{b-ax}{d},$$

hingestellt, so befindet man sich vollständig außerhalb der „Größenlehre"; man hat nur Formen (angezeigte Operationen) und befindet sich also hinsichtlich der weiteren Behandlung ganz und vollkommen in dem weit abstrakteren Gebiete der Zahlenlehre (Analysis).

Und dies ist bei der einfachsten Aufgabe gerade so wie bei der zusammengesetztesten. Wir haben dies in der vorliegenden „allgemeinen Größenlehre" in einer Reihe von Beispielen deutlich nachzuweisen versucht. Es existirt aber eine eben so interessante als wichtige Anwendung der Zahlenlehre (Analysis) auf die Raumgrößenlehre, welche man die „Theorie der Koordinaten" nennt, und es ist der Zweck dieses Anhanges, diese Anwendung in's Besondere noch und in dem Geiste unserer, in vorstehender Schrift niedergelegten Ansichten hier sogleich nachzuweisen. Wir wollen dabei zeigen

1) daß Koordinaten sogenannte „entgegengesetzte Größen" nicht sind;

2) daß nur dann alle Inconsequenzen vermieden werden, wenn man von dieser bestimmten Ansicht ausgeht.

I.

Denkt man sich in einer Ebene zwei Gerade (Fig. 6.) OX und OY, welche nach X' und Y' rückwärts und nach allen Seiten hin ohne Ende fortgehen und welche unter sich einen beliebigen Winkel $XOY = \varphi$ bilden, — so ist jeder Punkt M in der Ebene völlig gegeben

1) wenn man weiß, in welcher der vier von den „Koordinaten-Axen" X'OX und Y'OY gebildeten Räume er liegt, und

2) wenn man seine mit den Axen OX, OY parallelen Abstände MQ und MP (die nie positiv und nie negativ sind, und

die wir daher die „absoluten" Abstände nennen wollen) kennt. — Diese (absoluten) Abstände MQ, MP heißen die „Koordinaten" des Punktes M. — Wir wollen endlich die mit der OX parallele Koordinate MQ oder OP noch in's Besondere die „Abscisse", die andere dann die „Ordinate" nennen.

II.

Betrachten wir nun in der Region XOY, (Fig. 7.) zwei Punkte A und B, und legen wir durch sie Gerade, parallel mit den „Axen" OX und OY, so entstehen, — wenn man sich noch die durch A und B gehende Gerade AB dazu denkt, — zwei congruente Dreiecke ACB und BDA. — Die beiden mit den Axen parallelen Seiten dieser Dreiecke wollen wir die „Katheten" nennen, obgleich der Winkel φ hier beliebig gedacht und der Winkel ADB oder ACB, $= 180^0 - \varphi$, also nicht nothwendig ein rechter Winkel ist. Die dritte Seite AB dieser Dreiecke mag die „Hypothenuse" derselben heißen.

Die mit der Abscisse OX parallele Kathete AD oder BC ist nun offenbar die Differenz der beiden Abscissen OA_1 und OB_1; d. h. es ist

$$AD = OB_1 - OA_1$$

oder 1) $AD = b - a$,

wenn unter b und a bezüglich die Abscissen der Punkte B und A verstanden werden.

Eben so ist die andere Kathete

2) AC oder $BD = \beta - \alpha$,

wenn unter β und α die Ordinaten der Punkte B und A verstanden werden.

Nimmt man eine gemeinschaftliche Längen-Einheit und mißt man damit alle Längen, also auch alle Abscissen und Ordinaten, so ergeben sich absolute (d. h. weder positive noch negative) Zahlen, welche wir die Koordinaten-Maaße nennen wollen, und versteht man in den Gleichungen 1.) und 2.) unter b, a,

β und α diese Koordinaten=Maaße, so hat man die Katheten AD und BD in absoluten ganzen oder gebrochenen Zahlen ausgedrückt.

Und da jede der beiden Axen OX oder OY völlig gleiches Recht hat, so wollen wir zunächst bloß eine derselben vorzugsweise beachten. Was in Bezug auf die eine entwickelt wird, gilt natürlich mutatis mutandis auch in Bezug auf die andere.

Liegt nun einer der beiden Punkte A und B z. B. A, links der Ordinaten=Axe OY (Fig. 8.), so ist dieselbe, mit der Abscissen=Axe OX parallele Kathete AD oder BC nicht mehr die Differenz, sondern dasmal die Summe der Abscissen OB_1 und OA_1. — Es ist also jetzt

$$AD = OB_1 + OA_1.$$

Will man aber doch abermals AD durch dieselbe Rechnungs=Form b—a ausdrücken, wie im erstern Falle (wo A rechts von OY lag), während noch OB_1 durch b ausgedrückt bleibt, so muß

$$OB_1 + OA_1 = b - a = OB_1 - a$$

werden, also $a = -OB_1$;

d. h. wenn man jetzt unter a nicht mehr den Abstand OB_1, sondern die Rechnungsform $0 - OB_1$ (die man gewöhnlich kürzer bloß so schreibt, nämlich $-OB_1$) versteht, so drückt dieselbe Rechnungsform b—a noch immer die Kathete AD aus, wie im erstern Falle (wo der Punkt A rechts von OY lag).

Liegt endlich A in der Axe OY selbst, so ist offenbar, wie (Fig. 9.) sehen läßt, die mit OX parallele Kathete

$AD = OB_1$ selbst; — soll aber der Ausdruck dafür noch immer b—a sein, — wie in den beiden anderen Fällen (wo A rechts oder links von OY lag), — während b noch immer die OB_1 vorstellt, so muß $b - a = OB_1 = b$, folglich $a = 0$ genommen werden.

Das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes: So lange der Punkt B rechts von OY bleibt und die Abscisse OB_1

durch b bezeichnet wird, so lange drückt die Differenz b—a die mit der Abscissen-Axe OX parallele Kathete AD aus, der Punkt A mag rechts oder links von OY oder in OY selbst liegen, wenn man nur unter a die Rechnungsform

$0+OA_1$ *) d. h. $+OA_1$, oder $0-OA_1$ d. h. $-OA_1$,

oder endlich die Form 0 (Null) selbst versteht, je nachdem A rechts von OY oder links von OY oder in OY selbst liegt.

Betrachtet man nun noch die Fig. 10. und 11., so überzeugt man sich augenblicklich:

daß, wie auch A und B gegen die Axen liegen mögen, doch allemal die mit der Abscissen-Axe OX parallele Kathete AD ausgedrückt ist, durch eine und dieselbe Rechnungsform

$$b-a,$$

wenn man nur unter b oder a die Abscisse OB_1 oder OA_1 selbst, oder die Form $0+OB_1$ oder $0+OA_1$ (d. h. $+OB_1$, $+OA_1$) versteht, sobald der Punkt B oder A rechts von OY liegt, — wenn man dagegen durch dieselben Buchstaben b oder a die Rechnungsform $0-OB_1$ oder $0-OA_1$ (d. h. $-OB_1$, oder $-OA_1$) bezeichnet, sobald derselbe Punkt B oder A links von OY liegt, — endlich wenn man unter b oder a die Form 0 (Null) versteht, sobald der Punkt B oder A in der Axe OY selbst liegt.

III.

Das erste Geschäft eines Analysten ist: allemal die Rechnungen so anzulegen, daß die Grundlage derselben Ausdrücke enthalten, welche für alle einzelnen Fälle der vorzunehmenden

---

*) Es ist nämlich bewiesen worden, daß $0+p=(z-z)+p=(z+p)-z=(p+z)-z=p$ ist; so daß man also statt p jedesmal auch $0+p$ schreiben kann. — Dann ist aber später angenommen worden, daß man Summen und Differenzen von der Form $0+p$, $0-p$, kürzer bloß so: $+p$, $-p$ schreiben und die Null sich noch hinzudenken wolle.

Anwendung gleichmäßig von derselben und unverändert bleibenden Form sind.

Daher führen wir jetzt noch neben den (stets absoluten) Koordinaten der einzelnen Punkte und den absoluten Maaßen derselben auch noch die Koordinaten-Werthe derselben ein und verstehen unter letzteren die 0 (Null), wenn die Punkte in den Axen selber liegen, oder die mit dem vorgesetzten + oder – Zeichen versehenen Koordinaten-Maaße, also z. B. für den Punkt A in den Fig. 8., 9., 10. und 11. die Rechnungsformen $+OA_1$ oder $-OA_1$ (die angezeigten Additionen und Subtraktionen $0+OA_1$ oder $0-OA_1$), je nachdem der Punkt rechts oder links von OY liegt.

IV.

Unter dieser ein für allemal gemachten Annahme ist also die mit der Abscissen-Axe parallele Kathete AD oder BC allemal durch die Differenz der Abscissen-Werthe d. h. durch die Rechnungsform $b-a$, — die andere Kathete BD oder AC aber allemal durch die Differenz der Ordinaten-Werthe d. h. durch die Rechnungsform $\beta-\alpha$ in absoluten ganzen oder gebrochenen Zahlen ausgedrückt, welches der in Fig. 12. zu sehenden (9) Axen-Paare OX und OY man auch zu Grunde legen mag, — wenn man nur unter b, a, β und α nicht die Koordinaten, auch nicht die Koordinaten-Maaße, sondern diejenigen Rechnungsformen versteht, welche wir so eben (in III.) unter dem Namen der Koordinaten-Werthe eingeführt haben.

Auf diese Wahrheit gestützt, in Verbindung mit der andern bereits fest stehenden, daß es nämlich keine „negativen Größen" giebt (also auch keine positiven), sondern daß alle Größen, also auch alle Längen, alle Flächenräume und alle Körper-Inhalte nur absolut sind und auch nur durch absolute (nicht positive und nicht negative) ganze oder gebrochene Zahlen ausgedrückt werden können, — auf diese beiden Wahrheiten gestützt ist es nun un-

gemein einfach ohne alle Inconsequenzen alle Sätze der Koordinaten-Theorie ganz allgemein hinzustellen, wie wir es jetzt thun wollen.

V.

Sind zunächst A und B (Fig. 13.) zwei feste Punkte und a, α die Koordinaten-Werthe des erstern, so wie b, β die des andern, und ist M irgend ein dritter Punkt, der in derselben geraden (Richtung) AB liegt und dessen Koordinaten-Werthe wir durch x, ξ vorstellen wollen, wie auch die Koordinaten-Axen liegen mögen, — und zieht man durch diese Punkte A, B und M Parallele (AE, BF, BD, ME) mit den Koordinaten-Axen, die unter sich den Winkel φ bilden mögen, so daß

Winkel ADB = Winkel BFM = Winkel AEM = $180^0 - \varphi$

ist, — so hat man bei allen Lagen der Koordinaten-Axen

$$AD = b-a, \quad AE = x-a \quad \text{und} \quad BF = x-b,$$

und $$BD = \beta-\alpha, \quad ME = \xi-\alpha \quad \text{und} \quad MF = \xi-\beta;$$

und (wegen der drei ähnlichen Dreiecke) die Gleichungen

$$1) \qquad \frac{\xi-\beta}{x-b} = \frac{\xi-\alpha}{x-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a},$$

durch welche namentlich die analytische Abhängigkeit zwischen x und ξ, — die der geometrischen Bedingung entspricht, daß M in derselben Richtung AB liegen soll, — ausgedrückt ist.

Löst man irgend eine dieser drei Gleichungen 1.) nach ξ auf, so erhält man stets ein und dasselbe Resultat, nämlich

$$2) \qquad \xi = \frac{\beta-\alpha}{b-a}\cdot x + \frac{\alpha b-\beta a}{b-a};$$

und derselben Gleichung kann man auch noch die Form

$$3) \qquad \xi-\alpha = \frac{\beta-\alpha}{b-a}\cdot(x-a)$$

oder die Form

$$4) \qquad \xi-\beta = \frac{\beta-\alpha}{b-a}\cdot(x-b)$$

geben.

Liegt der Punkt M zwischen A und B, wie in Fig. 14., so sind die Katheten MF und BF nicht mehr, wie vorher bezüglich durch x—b und $\xi-\beta$, sondern jetzt bezüglich durch b—x und $\beta-\xi$ ausgedrückt und statt des erstern der drei Quotienten in 1.) muß nun dieser andere, nämlich $\frac{\beta-\xi}{b-x}$ gesetzt werden, welcher aber jenem wieder gleich ist. Die Gleichungen 1.—4.) bleiben daher auch in diesem Falle genau dieselben.

Und eben so ist leicht einzusehen, daß diese Gleichungen 1.—4. noch dieselben bleiben, wenn auch der Punkt M zwar noch in der Richtung AB, aber unterhalb A liegen sollte.

Liegen endlich die Punkte A und B so gegen die mit den Koordinaten-Axen parallelen Geraden AD, BF, MF, AE, wie in Fig. 15., so sind zwar noch die mit der Abscissen-Axe OX parallelen Katheten ausgedrückt, bezüglich durch

$$b-a, \quad x-a \quad \text{und} \quad x-b,$$

dagegen die mit der OY parallelen Katheten bezüglich durch

$$\alpha-\beta, \quad \alpha-\xi \quad \text{und} \quad \beta-\xi$$

(die in der Lage der Fig. 14. durch

$$\beta-\alpha, \quad \xi-\alpha \quad \text{und} \quad \xi-\beta$$

ausgedrückt gewesen sind); allein dies ändert die Gleichung 1.) nur der Form nach, während sie dem Wesen nach unverändert dieselbe bleibt.

Sind endlich die Katheten des Dreiecks ADB durch die Differenzen der Koordinaten-Werthe ausgedrückt, und ist der Axen-Winkel φ noch gegeben, so ist es leicht auch die Entfernung AB trigonometrisch zu berechnen und man findet (sowohl in der Lage der Fig. 14. wie in der Lage der Fig. 15.) allemal

$$5) \quad AB = +\sqrt{(b-a)^2+(\beta-\alpha)^2+2(b-a)(\beta-\alpha)\cdot Cos\,\varphi},$$

wo allemal der positive oder absolute Werth der Wurzel genommen werden muß, weil eine Länge nie negativ sein kann. — In der Lage der Fig. 15. kommt zwar $\alpha-\beta$ statt $\beta-\alpha$ zu

stehen; dagegen hat nun das Dreieck ADB bei D den Axen-Winkel φ selbst, während in der Fig. 14. der Winkel $ADB = 180^{o} - \varphi$ ist.

VI.

Denkt man sich in V. die Koordinaten-Werthe a, α, b und β bestimmt gegeben, so liegen die Punkte A und B fest. Denkt man sich nun den Abscissen-Werth x des Punktes M ganz allgemein, so daß man sich nach und nach immer andere und andere reelle Werthe dafür gesetzt denken kann, so liefert eine der Gleichungen 1.–4. allemal den Ordinaten-Werth ξ dazu. Zeigt sich derselbe negativ, so wird die entsprechende Ordinate (der Annahme in III. zufolge) nach unten getragen, während der Punkt M in der Abscissen-Axe OX selbst angenommen werden muß, wenn $\xi = 0$ sich findet. — Statt x aber wird ein negativer Werth gesetzt, wenn man einen Punkt M der Geraden AB haben will, welcher links von OY liegt, während 0 (Null) statt x gesetzt werden muß, wenn man den Punkt M der Richtung AB im Auge hat, welcher in der Ordinaten-Axe OY selbst liegt (alles der Annahme in III. zufolge).

Alle Punkte M, welche man aber auf diesem Wege dadurch findet, daß man zu einem beliebig angenommenen reellen Werth von x einen (reellen) Werth von ξ dazu findet und dann diese beiden zusammengehörigen Werthe als Koordinaten-Werthe eines Punktes nimmt, — alle diese Punkte M also liegen nothwendig in der Richtung AB, also nothwendig in einer und derselben geraden Linie. — Jede der Gleichungen 1.–4. heißt deshalb die Gleichung dieser Geraden ABM.

VII.

Aber auch umgekehrt: Hat man zwischen den Koordinaten-Werthen x und ξ irgend eines Punktes eine Gleichung gegeben von der Form

6) $$\xi = px + q,$$

wo p und q beliebige aber bestimmte reelle Werthe vorstellen, so liefert diese Gleichung zu allen reellen Werthen von x, zugehörige reelle Werthe von ξ, also unendlich-viele Punkte, und diese liegen alle nothwendig in einer und derselben Geraden, so daß die algebraische Gleichung 6.) zwischen x und ξ von der ersten Ordnung, allemal die Gleichung einer Geraden ist.

Denn nennt man α den Werth von ξ, der aus der 6.) sich für $x = a$ ausrechnet, so hat man

$$7) \qquad \alpha = pa + q,$$

während a und α die Koordinaten-Werthe eines der durch die Gleichung 6.) gegebenen Punkte sind, den wir durch A (Fig. 14. oder Fig. 15.) bezeichnen wollen. — Nennt man ferner β den Werth von ξ, der sich aus derselben Gleichung für $x = b$ ausrechnet, so sind b und β die Koordinaten-Werthe eines zweiten Punktes B, der zu den durch die Gleichung 6.) gegebenen Punkten gehört, während

$$8) \qquad \beta = pb + q$$

ist. Zieht man nun die Gleichungen 6., 7. und 8.) von einander paarweise ab, so erhält man sofort

$$\frac{\xi-\beta}{x-b} = \frac{\xi-\alpha}{x-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a} = p;$$

d. h. die Seiten der Dreiecke (in Fig. 14. oder 15.), welche den gleichen Winkel einschließen, sind proportionirt; also sind die Dreiecke einander ähnlich; folglich sind auch die Winkel bei M und B oder M und A, einander gleich; also liegen MA und BA in einer und derselben Geraden, welcher von den unendlich-vielen übrigen, durch die Gleichung 6.) gegebenen Punkte unter M auch verstanden werden mag.

VIII.

Denkt man sich daher eine Gleichung zwischen zusammengehörigen Koordinaten-Werthen x und ξ irgend eines Punktes, welche zu einer Reihe stetig auf einander folgender reellen Werthe

von x, (immer oder nur eine Zeitlang) auch reelle Werthe von ξ liefert, so liegen die unendlich-vielen stetig auf einander folgenden Punkte, welche durch diese Gleichung gegeben sind allemal in einer Geraden, wenn die Gleichung zwischen x und ξ eine algebraische und von der ersten Ordnung (in Bezug auf die Unbekannten x und ξ) ist; dieselben Punkte bilden allemal eine krumme Linie, so oft die Gleichung irgend eine andere ist*).

Erhält ξ zu einem reellen Werth von x, nur imaginäre Werthe, so ist dies ein Beweis, daß in der zu der Abscisse x gehörigen Ordinaten-Richtung kein Punkt liegt, dessen Koordinaten-Werthe der gegebenen Gleichung entsprechen. Da man sich Gleichungen zwischen x und ξ denken kann, welche zu jedem reellen Werth von x nur imaginäre Werthe von ξ geben, so kann es Gleichungen geben, z. B. die Gleichung

$$\xi^2 = -(x-a)^2-b^2$$

(wo a und b als reell gegeben gedacht werden), welchen kein einziger Punkt entspricht, während z. B. der Gleichung

$$(\xi-b)^2 = -(x-a)^2$$

nur der einzige Punkt entspricht, dessen Koordinaten-Werthe a und b sind.

IX.

Nimmt man nun die Gleichung

$$\xi = px+q$$

*) Wir wollen hier nur historisch bemerken, daß während die algebraische Gleichung der ersten Ordnung zwischen x und ξ, nämlich

$$a+bx+c=0 \quad \text{oder} \quad \xi = \left(-\frac{b}{a}\right)\cdot x + \left(-\frac{c}{a}\right)$$

alle Geraden in ihren verschiedenen Lagen gegen die Axen vorstellt, — die algebraische Gleichung der zweiten Ordnung zwischen x und ξ, nämlich

$$a\xi^2+bx\xi+cx^2+d\xi+ex+f=0$$

alle Kegelschnitte und nur die Kegelschnitte ausdrückt, sobald man unter x und ξ zusammengehörige Koordinaten-Werthe sich denkt, die noch unbestimmt (veränderlich) bleiben.

der Geraden, die **alle** gerade Linien giebt in ihren verschiedenen Lagen zu den Axen, wenn man nur nach und nach die reellen Werthe von p und q anders und anders gegeben sich denkt, so ergiebt sich sofort Folgendes:

1) Für $x=0$ wird $\xi=q$, also positiv, negativ oder 0, je nachdem q positiv, negativ oder Null gegeben ist. Der absolute Werth von q drückt also den Abstand des Durchschnitts-Punktes H (Fig. 11.) unserer Geraden mit der Axe OY, von dem Durchschnittspunkt O der Axen aus, und dieser Durchschnittspunkt liegt oberhalb OX (also in OY) oder unterhalb OX (also in OY′), je nachdem q positiv oder negativ gegeben wird. — Ist $q=0$, die Gleichung also bloß so:

$$\xi=p\cdot x,$$

so geht die durch sie vorgestellte Gerade allemal durch den Punkt O (den sogenannten Anfangspunkt der Koordinaten).

2) Sind a, α, desgleichen b und β die Koordinaten-Werthe zweier Punkte A und B unserer Geraden, so daß man aus

$$\xi=px+q$$

nothwendig $$\beta=pb+q$$

und $$\alpha=pa+q$$

hat, so folgt durch Subtraktion dieser letztern Gleichungen von einander

$$\frac{\beta-\alpha}{b-a}=p,$$

d. h. p ist allemal das Verhältniß (der Quotient) der beiden Katheten BD und AD (Fig. 11.). Von dem Koeffizienten p hängt also einzig und allein der Winkel ψ ab, den unsere Gerade mit der Abscissen-Axe OX macht.

3) Giebt man dem p stets denselben Werth, während die Werthe von q stets abgeändert gedacht werden, so rückt die Gerade parallel mit sich fort, nach oben wenn q größer, nach unten wenn q kleiner gedacht wird (weil die Gerade mit der Abscissen-Axe stets einen und denselben Winkel ψ macht).

Die Gleichungen

$$\xi = px+q$$

und $$\xi' = px+q'$$

drücken also zwei unter sich parallele Gerade aus. — Und umgekehrt: Sollen die beiden

durch (☉)··· $\xi = px+q$

und (☾)··· $\xi' = p'x+q'$

vorgestellten Geraden mit einander parallel laufen, so muß nothwendig $p = p'$ sein.

4) Laufen die durch die Gleichungen (☉) und (☾) gegebenen Geraden nicht mit einander parallel, so sind die Koordinaten-Werthe x und ξ ihres Durchschnittspunktes so, daß sie beiden Gleichungen genügen, so daß man hat

1) $\xi = px+q$

und 2) $\xi = p'x+q'$.

Da man nun durch Auflösung dieser beiden Gleichungen nach x und ξ die bestimmten Werthe erhält, welche beide Gleichungen zugleich identisch machen, so sind diese so gefundenen Werthe, nämlich

$$x = -\frac{q'-q}{p'-p} \quad \text{und} \quad \xi = \frac{p'q-pq'}{p'-p}$$

die bestimmten Koordinaten-Werthe des Durchschnittspunktes *).

5) Giebt man der Gleichung für die Gerade die Form

$$\xi-\alpha = p(x-a),$$

so geht solche durch den Punkt A, dessen Koordinaten-Werthe a und α sind. — Giebt man nun dem p nach und nach andere

*) Ist $p = p'$, also $p'-p = 0$, so existiren nicht Werthe von x und ξ, welche beiden Gleichungen zugleich genügen; also giebt es dann keinen Durchschnittspunkt. — Man würde also das in N. 3. aufgestellte Kennzeichen des Parallelismus der Geraden auch auf diesem Wege gefunden haben.

und andere reelle Werthe, so dreht sich die Gerade um diesen Punkt A herum und neigt sich gegen die Abscissen-Axe desto mehr, je kleiner der absolute Werth von p ist.

6) Sucht man den Winkel θ, den zwei durch die Gleichungen

$$(\odot)\cdots \quad \xi = px + q$$

und

$$(☾)\cdots \quad \xi = p'x + q'$$

gegebene Gerade an ihrem Durchschnittspunkte mit einander machen, so darf man nur die zwei durch die Gleichungen

$$(\odot\, 1.)\cdots \quad \xi'' = p \cdot x$$

und

$$(☾\, 1.)\cdots \quad \xi''' = p' \cdot x$$

gegebenen und (nach N. 3.) mit jenen bezüglich parallelen Geraden (welche aber jetzt durch den Anfangspunkt O der Koordinaten gehen) an ihre Stelle setzen, weil letztere Geraden denselben Winkel θ unter sich bilden. Dieser Winkel θ hängt also nur von den Koeffizienten p und p' ab, keineswegs aber von q oder q'.

Denkt man sich nun in der Geraden $\odot$. 1. einen Punkt M (Fig. 16.), dessen Koordinaten-Werthe a und α sind, so hat man (nach $\odot$. 1.)

$$\alpha = pa;$$

und denkt man sich noch in der andern Geraden (☾. 1.) einen beliebigen Punkt N, dessen Koordinaten-Werthe b und β sind, so hat man (aus ☾. 1.)

$$\beta = p'b.$$

Aus $OM_1 = a$ und $MM_1 = -pa$ (weil $\alpha = pa$ der Zeichnung nach negativ, folglich $-pa$ der positive oder absolute Werth der Länge MM_1 ist) und dem eingeschlossenen Winkel $OM_1M = \varphi$ wird nun trigonometrisch die Länge OM berechnet; — eben so berechnet sich aus $ON_1 = b$ und $NN_1 = p'b$ und dem eingeschlossenen Winkel $ON_1N = 180^\circ - \varphi$, die Entfernung ON als zweite Seite des Dreiecks, während die Entfernung MN

aus V. N. 5. sich ergiebt. — Kennt man aber die drei Seiten OM, ON und MN eines Dreiecks OMN, so ist nach dem allgemeineren Pythagorischen Lehrsatz in der Trigonometrie, wenn Winkel MON $= \theta$ gesetzt wird

$$Cos\,\theta = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON}.$$

Nimmt man noch überdies $b = a = 1$, so daß $\beta = p'$ und $\alpha = p$ wird, so hat man

$$OM = +\sqrt{1+p^2+2p \cdot Cos\,\varphi}$$

$$ON = +\sqrt{1+p'^2+2p' \cdot Cos\,\varphi} \text{ *)}$$

und $$MN = +\sqrt{(p-p')^2} = \pm(p-p') = +(p'-p) \text{ **)}.$$

Daraus folgt nun, wenn man diese letzteren Werthe substituirt

(ꝺ)··· $$Cos\,\theta = \frac{1+pp'+(p+p')\,Cos\,\varphi}{\sqrt{1+p^2+2p \cdot Cos\,\varphi} \cdot \sqrt{1+p'^2+2p' \cdot Cos\,\varphi}},$$

---

*) Es ist nämlich

$$OM^2 = OM_1{}^2 + MM_1{}^2 - 2OM_1 \cdot MM_1 \cdot Cos\,\varphi,$$

aber $OM_1 = 1$ und $MM_1 = -\alpha = -p$, weil nach der Annahme der Zeichnung α negativ geworden ist, also $-\alpha$ die positive oder absolute Zahl vorstellt, welche die Länge MM_1 ausdrückt.

Analog ist

$$ON^2 = ON_1{}^2 + NN_1{}^2 - 2ON \cdot NN_1 \cdot Cos\,(180^\circ - \varphi)$$

und $ON_1 = 1$, $NN_1 = \beta = p'$, weil nach der Zeichnung β positiv geworden ist.

**) Es findet sich im Allgemeinen (nach V. N. 5.)

$$MN = +\sqrt{(\beta-\alpha)^2 + (b-a)^2 + 2(\beta-\alpha)(b-a) \cdot Cos\,\varphi},$$

also für die hiesigen Werthe von β, α, b und a

$$MN = +\sqrt{(p'-p)^2} = +\sqrt{(p-p')^2}.$$

Nun ist aber jede dieser letztern Wurzeln zweideutig und ausgedrückt durch $\pm(p'-p)$ oder auch durch $\pm(p-p')$, und es muß nun in jedem besonderen Falle noch der positive oder absolute Werth herausgesucht werden. Dieser ist aber bei der Annahme unserer Figur $= p'-p$, weil in der Figur p negativ, p' aber positiv angenommen worden.

wo die Quadratwurzeln im Nenner beide positiv oder absolut genommen werden müssen, während der Zähler positiv oder negativ oder Null werden kann, so daß sich der Winkel θ bald spitz, bald stumpf, bald als ein rechter sich ausweist. — Der so gefundene Winkel θ ist aber allemal der, welchen die beiden Schenkel mit einander machen, welche von O aus rechts von OY liegen.

7) Ist umgekehrt nur die eine Gerade gegeben

$$\xi = px + q$$

und sucht man eine zweite durch O gehende Gerade (d. h. ihre Gleichung), welche mit der gegebenen Geraden $\xi = px + q$ einen gegebenen Winkel θ macht, so darf man nur als Gleichung dieser gesuchten Geraden nehmen

$$\xi' = p'x$$

und p' aus der oben stehenden Gleichung (𝔡) in p und θ ausgedrückt finden. — Man findet für p' in der Regel zwei Werthe, weil die Gleichung nach p' eine quadratische wird, und man wird daher im Allgemeinen zwei Gerade haben, welche von O aus mit der gegebenen Geraden den gegebenen Winkel θ bilden.

Soll die zweite Gerade auf der erstern senkrecht stehen, so giebt die Gleichung (𝔡) jetzt diese, nämlich:

$$1 + pp' + (p + p') \cdot Cos\,\varphi = 0,$$

woraus

$$p' = -\frac{1 + p \cdot Cos\,\varphi}{p + Cos\,\varphi}$$

sich ergiebt, und

$$p' = -\frac{1}{p}$$

wenn der Axen-Winkel φ ein rechter sein sollte. — Man findet also von O auf die gegebene Gerade nur eine Senkrechte.

X.

Sucht man den Flächen-Inhalt einer durch eine Gleichung

$$\xi = f_x,$$

(wo f_x irgend einen Ausdruck vorstellt, der x enthält) gegebenen Kurve (Fig. 17. 18.) und zwar den Inhalt DEFG zwischen der Kurve DE, den beiden Ordinaten-Richtungen DF und EG, welche zu den Abscissen-Werthen a und b gehören, und zwischen der Abscissen-Axe OX, so hat man zunächst (nach IV.)

$$FG = b - a.$$

Theilt man nun diese Länge FG in unendlich-viele Theile, von denen $PQ = dx$ einer sein soll, und denkt man sich durch alle Theilpunkte parallele (wie z. B. PM, QN) mit der Ordinaten-Axe OY, so daß der gesuchte Inhalt in lauter unendlich schmale Streifen wie PQMN zerlegt wird, so ist der Inhalt

$$PQMN = \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi \text{ in Fig. 17.},$$

dagegen $= -\xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$ in Fig. 18. *),

weil in der letztern Figur (nach III.) ξ etwas negatives vorstellt, also $-\xi$ die absolute Länge PM ausdrückt, wenn $OP = x$ gedacht ist. Der gesuchte Inhalt DEFG ist daher

$$\text{in Fig. 17.} \quad = \int_a^b \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi = \int_a^b f_x \cdot dx \cdot Sin\,\varphi,$$

$$\text{in Fig. 18.} \quad = \int_a^b -\xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi = -\int_a^b f_x \cdot dx \cdot Sin\,\varphi,$$

wenn $\int_a^b f_x \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$ die Summe aller der Produkte $f_x \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$ vorstellt, für alle um unendlich wenig verschiedene Werthe von x, von $x = a$ an bis zu $x = b$ hin genommen, — eine Summe, welche die Integral-Rechnung für jeden

*) Ein solcher Streifen wird als ein Parallelogramm angesehen und berechnet. Man erhält dadurch einen unendlich-kleinen Theil des wahren Inhalts zu wenig oder zu viel. Es kann aber bewiesen werden, daß die Summe aller dieser Fehler noch unendlich-klein ist.

gegebenen Ausdruck f_x zu finden lehrt. Jeder dieser Inhalte zeigt sich natürlich als ein absoluter d. h. nicht negativ, da es negative Größen, also auch negative Inhalte nicht giebt.

XI.

Sucht man den Inhalt DD'EE' (Fig. 19.) zwischen den beiden Ordinaten-Richtungen DD' und EE', welche zu den Abscissen-Werthen a und b gehören, und den beiden Kurven DE und D'E', welche bezüglich durch die Gleichungen

$$\xi = f_x \quad \text{und} \quad \xi' = f_x'$$

gegeben sind, so ist die Länge $MM' = \xi - \xi' = f_x - f_x'$ (nach III.) wenn $OP = x$ gedacht worden. Der Inhalt des Streifens MM'N'N (wenn man letzteren wieder als ein Parallelogramm ansieht) ist nun

$$= (\xi - \xi') \cdot dx \cdot Sin\,\varphi \quad \text{oder} \quad = (f_x - f_x') \cdot dx \cdot Sin\,\varphi,$$

und der ganze Inhalt

$$DD'EE' = \int_a^b (f_x - f_x') \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$$

und nie negativ.

Läßt man die zweite Kurve D'E' mit der Abscissen-Axe OX zusammenfallen, so ist

$$f_x' = 0 \quad (\text{für jeden Werth von } x)$$

und der Inhalt DEFG zeigt sich nun aus der letztern Formel

$$= \int_a^b (f_x - 0) \cdot dx \cdot Sin\,\varphi = \int_a^b f_x \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$$

und dies ist der Fall der Fig. 17. wieder und man hat dasselbe in IX. gefundene Resultat noch einmal gefunden.

Läßt man aber die obere (erstere) Kurve mit der Abscissen-Axe zusammenfallen, so ist

$$f_x = 0 \quad (\text{für jeden Werth von } x)$$

und der Inhalt D'E'FG findet sich nun (aus der allgemeinen Formel für den Inhalt DED'E')

$$= \int_a^b (0 - f_x') \cdot dx \cdot Sin\,\varphi = \int_a^b -f_x' \cdot dx \cdot Sin\,\varphi,$$

und dies ist wiederum der Fall der Fig. 18., und auch hier fällt das gefundene Resultat mit dem in IX. gefundenen vollkommen zusammen.

XII.

Soll endlich (Fig. 20.) der Inhalt der Figur FDHEGH gefunden werden, zwischen den beiden Ordinaten-Richtungen DF und GE, der Kurve DHE und der Abscissen-Axe X'OX, während die Kurve selbst durch die Gleichung

$$\xi = f_x$$

gegeben sein mag, und sind die Abscissen-Werthe der Punkte F und G bezüglich a und b, — so muß man vor allen Dingen den Abscissen-Werth des Punktes H aufsuchen, in welchem die Abscissen-Axe von der Kurve geschnitten wird und da in H der Werth von $\xi = 0$ ist, so ist dieser gesuchte Abscissen-Werth der Werth von x aus der Gleichung $f_x = 0$ oder einer der Werthe von x, welche f_x zu Null machen. Wird dieser Werth c genannt, so ist der Inhalt

$$DFH = \int_a^c \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi,$$

dagegen der Inhalt

$$HEG = \int_c^b (-\xi) \cdot dx \cdot Sin\,\varphi.$$

Daher ist der gesuchte Inhalt

$$FDHEGH = \int_a^c \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi + \int_c^b (-\xi) \cdot dx \cdot Sin\,\varphi$$

$$= \int_a^c \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi - \int_c^b \xi \cdot dx \cdot Sin\,\varphi.$$


Schluß-Anmerkung.

So sehen wir die gesammte Koordinaten-Theorie in ihrer Grundlage, also die gesammte analytische Geometrie gerade da-

durch ganz streng (und einfach und leicht) begründet, daß wir die Existenz negativer „Größen" leugnen und in den positiven, negativen, gebrochenen und imaginären „Ausdrücken" nichts anders erblicken als angezeigte Operationen, d. h. nichts anders als vorhandene Verstandes-Thätigkeiten, die mit einander in Verbindung treten, deren Gegensätze und Beziehungen zu einander den allgemeinsten Theil der Analysis bilden, während die Kenntniß dieser letzteren uns nöthig ist, um Anwendungen auf die Vergleichung der „Größen" mit einander machen zu können.

Wie sich die negativen Werthe der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten machen, ohne zu der unzuläſſigen Ansicht, daß sie entgegengesetzte „Größen" seien, seine Zuflucht nehmen zu müssen, lehrt der zweite Theil dieses Werkes.

Druck von Gebr. Unger in Berlin.


15.
16.
17.
18.
19.
20.

Ohm, Martin,

Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik

Bd.: 1

Nürnberg 1853 - 55